

点数を用いる相対評価

How to assign consistent scores when using the results of different tests

豊 田 薫

Kaoru TOYODA

キーワード：標準値 (z-score), 標準化, 換算点, 得点分布, 正規分布

Key words : standard value (z-score), standardization, reduced score, score distribution, normal distribution

0. はじめに

わが国では、異なる試験の結果を統一的に評価する基準として偏差値がひろく使用される。ところが教育現場では、評価の結果を試験に依らない“点数”を用いて表示しなければならないときがある。それゆえ、点数表示の方法を工夫し必要な計算を自動化することは、実用上それなりの意義があると考えられる。本稿では、そのための簡単な試みを紹介する。

まず、標準値が偏差値と同じ役割をする統一基準であることを確かめる。つぎに標準化変換を転用し、異なる試験の間で得点を換算し合う仕組みを導入する。そうして得られる換算点と元の得点とから、より大きな得点系をつくり、点数による相対評価に役立てる。

詳細はつぎの各節に示される：1. 得点系の特性値と標準化 2. 換算点の作成 3. 点数表示法(1)―拡大得点系の使用 4. 点数表示法(2)―重ね合せの方法 5. 適用限界

また、付録1に簡単なモデル計算の結果を載せる。付録2は式の導出に宛てる。

1. 得点系の特性値と標準化

得点系と特性値

学力的に極端な差がない学生の集団を対象に、全 q 回の異なるテスト $t_1, t_2, \dots, t_q$ を実施し、受験者数をそれぞれ $n_1, n_2, \dots, n_q$ 人、その総数を n 人とする ($n = n_1 + \dots + n_q$)。個々の学生は原則として何れかの試験を1回だけ受ける。また、複数回の受験も認められるが、その場合には試験ごとに別人として扱われる。このとき、試験 $t_1, t_2, \dots, t_q$ の得点を表わす変数としてそれぞれ文字 $x_1, x_2, \dots, x_q$ を用い、各試験の個人の得点を第2の添字をつけて x_{1i} ($i=1, \dots, n_1$), x_{2i} ($i=1, \dots, n_2$), $\dots$, x_{qi} ($i=1, \dots, n_q$) で表わす。また、各テストの得点の集りを得点系とよび、試験コード $t_1, \dots, t_q$ の斜体文字 $t_1, \dots, t_q$ で表わし、次の縦配列で与える：

$$t_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n_1} \end{bmatrix}, \quad t_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n_2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad t_q = \begin{bmatrix} x_{q1} \\ x_{q2} \\ \vdots \\ x_{qn_q} \end{bmatrix} \quad (1)$$

得点系 t_j ($j=1, 2, \dots, q$) の特性値を導入する。算術平均を $\overline{x_j}$, 分散を $s_{x_j}^2$, 平均の周りの r 次の

積率を $m_r(x_j)$ として、次式で定義する：

$$\bar{x}_j \equiv \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ji}, \quad s_{x_j}^2 \equiv \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji} - \bar{x}_j)^2, \quad m_r(x_j) \equiv \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji} - \bar{x}_j)^r \quad (2)$$

これより $m_1(x_j) = 0$, $m_2(x_j) = s_{x_j}^2$ を得る. また標準偏差を s_{x_1} , s_{x_2} , $\dots$, s_{x_q} で表わす. ただし今後は誤解を生じない程度に記号の簡略化を図り s_1 , s_2 , $\dots$, s_q と表示することもある.

標準化, 標準値と偏差値

異なるテストの成績を相対的に評価するとき用いられる統一基準に, 標準値と偏差値がある. ここではこれらについて要約する. ある試験の標準偏差が s であるとき, 個人の得点 x_p を偏差値 T_p へ変換するにはまず x_p を標準化 (規準化ともいう) して標準値 z_p (z-スコア) を求め, $T_p = 50 + 10z_p$ によって偏差値へ変換する. したがって, 偏差値 T を用いて評価することと, 標準値 z で評価することは実質的に同じである. また, 標準値 z_p は, 個人の得点の平均値からの偏差 ($x_p - \bar{x}$) を, 標準偏差 s を単位として測る (無名数の) 指標であり, 式(1)の全得点に対して, 次のように与えられる.

$$z_{1i} = \frac{x_{1i} - \bar{x}_1}{s_{x_1}} \quad (i=1, \dots, n_1), \quad z_{2i} = \frac{x_{2i} - \bar{x}_2}{s_{x_2}} \quad (i=1, \dots, n_2), \quad \dots, \quad z_{qi} = \frac{x_{qi} - \bar{x}_q}{s_{x_q}} \quad (i=1, \dots, n_q) \quad (3)$$

ここで標準値 z_{1i} の添字にはテスト t_1 の得点 x_{1i} の標準値であることを明示するため, 得点の添字と同じものをつけている. 標準値を求めるこの変換を標準化変換 (または標準変換) という.

標準値 z が統一基準であるためには, 式(3)によって得られる z は全てのテストで通用することが必要である. それには, どのテストの得点分布も正規分布に近くなければならないことが知られている. 今後は, このことを得点分布に対する暗黙の了解とする. そしてこのとき, テスト t_1 の得点 x_{1i} と t_2 の得点 x_{2j} が等しくない ($x_{1i} \neq x_{2j}$) 場合でも, その標準値 z_{1i} と z_{2j} が同じ値になる ($z_{1i} = z_{2j}$) ならば, 両者は等価であるとみなされる. このように標準値 z を用いると, 得点にはすべて序列がつけられる. なお今後は, 実際の試験 t_j ($j=1, \dots, q$) の得点を, 後に導入する換算点と区別するとき, 原得点とよぶことにする.

今後のため, 標準値 z の基本的な性質を示す. これらは式(2)から容易に導かれる.

$$\sum_{i=1}^{n_j} z_{ji} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n_j} z_{ji}^2 = n_j \quad (j=1, \dots, q) \quad (4-1)$$

また, r 次の積率特性値 $\alpha_r(x_j)$ も標準値 z で表わすことができる.

$$\alpha_r(x_j) \equiv \frac{m_r(x_j)}{s_{x_j}^r} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} z_{ji}^r \quad (j=1, \dots, q) \quad (4-2)$$

ゆえに, $\alpha_1(x_j) = 0$, $\alpha_2(x_j) = 1$ となる. なお, α_3 は得点分布の歪度, α_4 は尖度といわれる.

2. 換算点の作成

換算点を得る仕組み

標準化変換が得点と標準値を 1 対 1 に対応づけることに着目し、任意のテストの得点を、他のテストの等価な換算点へ変換するために次の変換式系(5)を導入する。

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{1i} = \frac{x_{11i} - \bar{x}_1}{s_1} = \frac{x_{12i} - \bar{x}_2}{s_2} = \dots = \frac{x_{1qi} - \bar{x}_q}{s_q} \quad (i=1,2,\dots,n_1) \end{array} \right. \quad (5-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{2i} = \frac{x_{21i} - \bar{x}_1}{s_1} = \frac{x_{22i} - \bar{x}_2}{s_2} = \dots = \frac{x_{2qi} - \bar{x}_q}{s_q} \quad (i=1,2,\dots,n_2) \end{array} \right. \quad (5-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ z_{qi} = \frac{x_{q1i} - \bar{x}_1}{s_1} = \frac{x_{q2i} - \bar{x}_2}{s_2} = \dots = \frac{x_{qqi} - \bar{x}_q}{s_q} \quad (i=1,2,\dots,n_q) \end{array} \right. \quad (5-3)$$

式(5-1)の左端の 2 辺は、標準化変換(3)に他ならない。ただし試験 t_1 の原得点 x_{1i} (標準値は z_{1i}) をここでは x_{11i} と表わしている。(その理由はすぐ明らかになる。) つぎに左から 3 辺目の分数式に含まれる x_{12i} は換算点である。より正確に言えば、標準値が z_{1i} となるテスト t_2 (平均 $\bar{x}_2$, 標準偏差 s_2) の“得点”を換算点 x_{12i} と定義するのである。ここで x_{12i} を例に、換算点の 3 つの添字について説明しよう。第 1 の添字“1”は当該受験生が受けたテストの番号であり、第 2 添字“2”は換算先のテストの番号である。第 3 添字“i”は、前述のとおり、第 1 添字が示す試験を受けた個人の識別番号である。また原得点は、同じ試験への換算点とみて、第 2 添字に第 1 添字と同じ番号を置くものとする。先ほど、“原得点 x_{1i} (標準値は z_{1i})”をここでは x_{11i} と表わしている”と書いたのは、このためである。

変換式系(5)によって換算点を得られる仕組みを確認する。まず、式 (5-1) で、連比の先頭に原得点 x_{11i} ($i=1,\dots,n_1$) が置かれ、左端の標準値 z_{1i} が決まる。するとこの標準値に合致するよう、右の $q-1$ 個の辺 (テスト) の換算点が総て決定される。同様に、式 (5-2) では、連比の 2 番目に置かれる原得点 x_{21i} ($i=1,\dots,n_2$) が左端の標準値 z_{2i} を決め、これが他のすべてのテストの換算点を決定する。これを続けて最後の式(5-3)まで行なう。(原得点 x_{jji} が対角に配置されている点に注意する。そのねらいは次節で明らかになる。) 以上が、任意の試験の原得点を、他の $q-1$ 回の試験の換算点へ変換する仕組みである。

換算点の内分け

ここで変換式系(5) によって作られる換算点の内分けを調べる。一例として原得点 x_{11i} から得られる換算点 x_{12i} をとりあげる。これは式(5-1)によって、次のように書き替えることができる。

$$\begin{aligned} x_{12i} &= \bar{x}_2 + s_2 z_{1i} \\ &= x_{11i} + (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + (s_2 - s_1) z_{1i} \end{aligned} \quad (6)$$

上式 1 行目は、換算点 x_{12i} が試験 2 の平均点 $\bar{x}_2$ から $s_2 z_{1i}$ だけ外れた点数であることを表わしている。また 2 行目は、同じ換算点が原得点 x_{11i} と、その右の 2 つの補正項の和からなることを示している。補正の第 1 項は、変換先の平均点と変換元の平均点の差 ($\bar{x}_2 - \bar{x}_1$) であり、

これは異なる試験の得点差を全体に補正するときに履かせる“下駄”に相当する．補正の第 2 項は標準偏差の差($s_2 - s_1$)と標準値 z_{1i} の積である．したがって標準偏差 s_2 と s_1 にほとんど差がない場合には無視できるが，標準偏差に相当の差があり，しかも標準値 z_{1i} の絶対値が大きい場合には無視できない値になる．

式(6)はまた，異なるテストの間で行われる点数調整について示唆を与える．しばしば調整は，平均点の差を，平均点が低い方の試験の得点に一律に加算することによって行われる．しかし，上で見たとおり，それでは不十分である．より正しい点数調整は，式(5) で決定される換算点を用いることによって達成できる．

3. 点数表示法 (1) — 拡大得点系の使用

拡大得点系をつくる

点数を用いる相対評価に役立てるため，原得点系（以後，略すとき原系という） $t_j (j=1, \dots, q)$ に換算点を付け加えて，次式(7)に示す q 個の拡大得点系（略すとき拡大系という） $\tau_j (j=1, \dots, q)$ をつくる．その要領はつぎのとおりである．

まず各 τ_j の最初の縦配列は，原得点と換算点が，要素としてどのように並ぶかを具体的に示している．並べ方は単純であり，変換系(5)の連比に現れている原得点 x_{jih} と換算点 x_{kjh} を辺（つまり試験 j ）ごとに縦に拾うだけである．つぎに，この配列の要素を，等号を挟んで右にある縦配列の要素 ξ_{ji} と上から順に 1 対 1 に対応づける．ただし右側の配列では，拡大系の変数として新たに $\xi_j (j=1, \dots, q)$ を導入し，第 2 の添字をつけて要素 $\xi_{ji} (i=1, \dots, n)$ としている．こうすることで配列の要素 $x_{kjh} (k=1, \dots, q; h=1, \dots, n_k)$ は，総て右側の配列の要素 ξ_{ji} に読み替えることができる．変数 ξ_j のことを以後，拡大得点とよぶ．

$$\tau_1 \equiv \begin{bmatrix} x_{111} \\ x_{112} \\ \dots \\ x_{11n_1} \\ x_{211} \\ x_{212} \\ \dots \\ x_{21n_2} \\ \vdots \\ x_{q11} \\ x_{q12} \\ \dots \\ x_{q1n_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \dots \\ \xi_{1n_1} \\ \xi_{1n_1+1} \\ \xi_{1n_1+2} \\ \dots \\ \xi_{1n_1+n_2} \\ \vdots \\ \xi_{1n-n_q+1} \\ \xi_{1n-n_q+2} \\ \dots \\ \xi_{1n} \end{bmatrix}, \quad \tau_2 \equiv \begin{bmatrix} x_{121} \\ x_{122} \\ \dots \\ x_{12n_1} \\ x_{221} \\ x_{222} \\ \dots \\ x_{22n_2} \\ \vdots \\ x_{q21} \\ x_{q22} \\ \dots \\ x_{q2n_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \\ \dots \\ \xi_{2n_1} \\ \xi_{2n_1+1} \\ \xi_{2n_1+2} \\ \dots \\ \xi_{2n_1+n_2} \\ \vdots \\ \xi_{2n-n_q+1} \\ \xi_{2n-n_q+2} \\ \dots \\ \xi_{2n} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \tau_q \equiv \begin{bmatrix} x_{1q1} \\ x_{1q2} \\ \dots \\ x_{1qn_1} \\ x_{2q1} \\ x_{2q2} \\ \dots \\ x_{2qn_2} \\ \vdots \\ x_{qq1} \\ x_{qq2} \\ \dots \\ x_{qqn_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{q1} \\ \xi_{q2} \\ \dots \\ \xi_{qn_1} \\ \xi_{qn_1+1} \\ \xi_{qn_1+2} \\ \dots \\ \xi_{qn_1+n_2} \\ \vdots \\ \xi_{qn-n_q+1} \\ \xi_{qn-n_q+2} \\ \dots \\ \xi_{qn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

また， τ_j を（原得点系 t_j の）拡大得点系とよぶ理由は，配列の要素の一部に，テスト t_j の原得点系 t_j が必ず含まれているからである．たとえば， τ_1 では，最初の n_1 個の要素 $\{x_{111}, \dots, x_{11n_1}\}$

がテスト t_1 の原系 t_1 に相当している．その次の n_2 個の要素 $\{x_{211}, \dots, x_{21n_2}\}$ は，変換式系(5・2)によってテスト t_2 の原得点 x_{22i} ($i=1, \dots, n_2$) から作られた換算点である．それより下の要素もみな換算点であり，これらはすべて第 2 添字（変換先の試験番号）が“1”である．なお，こうしてつくられた拡大系 $\tau_1, \dots, \tau_q$ に含まれる要素の個数はどれも $n (=n_1 + \dots + n_q)$ である．

拡大系 τ_j ($j=1, \dots, q$) はどれでも，全受験生を対象とする，点数を用いる相対評価のために使うことができる．ただし各 τ_j には，原得点はテスト t_j のものだけが含まれ，他はすべて換算点である．どの拡大系を用いて全受験生に点数をつけるかは，評価する者の判断に委ねられる．もしも総体的に高得点にしたいなら，平均点が最大の原系 t_j を含む拡大系 τ_j を選ぶのが好いだろう．また，縦配列 τ_j をいわゆる表計算ソフトウェアで作るには，列を使ってセルごとに τ_j の要素 $x_{kjh} = \overline{x_j} + s_j z_{kh}$ ($k=1, \dots, q; h=1, \dots, n_k$) を算出すればよい．

拡大得点系の性質

拡大得点系 τ_j ($j=1, \dots, q$) の特性値について調べる．まず拡大得点 ξ_j の平均，分散について次の関係が導かれる【付録 2 参照】．

$$\overline{\xi_j} = \overline{x_j}, \quad s_{\xi_j}^2 = s_{x_j}^2 \quad (j=1, \dots, q) \quad (8)$$

このように拡大系の平均と分散は，それぞれ原系の平均と分散に等しくなる．その理由は，変換系(5)によって作られる換算点が，2 次の積率まで，変換先の原得点系と矛盾しないように構成されているからである．また式(8)から， ξ_j の得点分布の特徴を推測することができる．すなわち，拡大得点系 τ_j へは原得点以外に他の試験からの換算点が取込まれるため， τ_j のデータ数はもとの数より多くなる．それにもかかわらず分散の値が変わらないことから， ξ_j の分布は， x_j の分布と比べると，平均の近くに，より大きな度数を有すると考えられる．

積率特性値 $\alpha_r(\xi_j)$ は，試験番号 j によらない一定値となる．

$$\alpha_r(\xi_j) \equiv \frac{m_r(\xi_j)}{s_{\xi_j}^r} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^q n_j \alpha_r(x_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^r \quad (j=1, \dots, q) \quad (9)$$

ただしここに現れている標準値 z_i ($i=1, \dots, n$) は，式(5)の左端にある，添字を 2 つ用いる表記 $\{z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1n_1}, z_{21}, \dots, z_{qn_q}\}$ を，添字を 1 つにした表記 $\{z_1, z_2, \dots, z_{n_1}, z_{n_1+1}, \dots, z_n\}$ へと切り替えている．このとき異なる表記の z 同士は，逐次 1 対 1 に対応させるものとする．

4. 点数表示法 (2) — 重ね合せの方法

上で得た q 個の拡大系 τ_j ($j=1, \dots, q$) のどれにも原得点と換算点が含まれている．そのため複数の担当者が別々に試験を行なうとき，拡大系のどれか 1 つを使って点数をつけるとすると，換算点が採用される担当者は違和感を覚える可能性がある．誰もが受け容れやすい点数のつけ方はないものだろうか．

拡大得点系の 1 次結合の導入

変換式系(5)は, 変数 ξ_j ($j=1, \dots, q$) を用いると, 次式(10)の 1 行目として表わすことができる.

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{\xi_{1i} - \bar{x}_1}{s_1} = \frac{\xi_{2i} - \bar{x}_2}{s_2} = \dots = \frac{\xi_{qi} - \bar{x}_q}{s_q} \\ &= \frac{\lambda_1(\xi_{1i} - \bar{x}_1) + \lambda_2(\xi_{2i} - \bar{x}_2) + \dots + \lambda_q(\xi_{qi} - \bar{x}_q)}{\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \dots + \lambda_q s_q} \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)$$

また 1 行目の連比より, 2 行目の分数式が成り立つ. ここに, λ_j ($j=1, \dots, q$) は非負の実数とする. ただし $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_q = 0$ は除く. そこで, 標準値 z_i を不変にする新たな得点の候補として, ξ_j の 1 次結合 (重ね合せ) を考え, これを η とする:

$$\eta \equiv \sum_{j=1}^q \lambda_j \xi_j \quad ; \quad \eta_i = \sum_{j=1}^q \lambda_j \xi_{ji} \quad (11)$$

すると, 式(10)から, η の平均 $\bar{\eta}$ と標準偏差 s_η について, 次式の成立が予想される.

$$\bar{\eta} = \sum_{j=1}^q \lambda_j \bar{x}_j, \quad s_\eta = \sum_{j=1}^q \lambda_j s_{x_j} \quad (12)$$

これらは証明が必要である. 結論をいうと, 二式はともに成立する【付録 2 参照】. よって, 受験生 i の点数 η_i は, $\eta_i = \bar{\eta} + s_\eta z_i$ で与えることができる.

積率特性値 $\alpha_r(\eta)$ については, 連比(10)から容易に

$$\alpha_r(\eta) \equiv \frac{m_r(\eta)}{s_\eta^r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^r = \alpha_r(\xi_j) \quad (j=1, \dots, q) \quad (13)$$

が導かれる.

係数選択の可能性と“多試験平均”

1 次結合(11)の係数 λ の選び方について考えよう. 標準値 z_i を不変に保つことだけを目的とするなら, 式(12)が成り立つことから係数 λ_j ($j=1, \dots, q$) の採り方は自由である. しかし係数の選び方に制限がないとすると, 得点系は無数に存在できることになる. そのため, 現実的な係数 λ の決定には何か別の条件もしくは要請が必要であると思われる. たとえば, 試験の満点の調整, あるいは平均や標準偏差の値の調節などがあり得るかもしれない.

ここでは $\lambda_j = 1/q$ ($j=1, \dots, q$) と採る. すると拡大得点 η は ξ_j の q 回の平均となり, 満点がどの試験でも同じであるとき, 妥当な選択といえるだろう. また,

$$\bar{\eta} \equiv \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \bar{\xi}_j = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \bar{x}_j, \quad s_\eta \equiv \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q s_{x_j} \quad (14)$$

となることから, 平均 $\bar{\eta}$ と標準偏差 s_η は, 原得点系の平均 $\bar{x}$ および標準偏差 s_x の, 全試験にわたる平均となる. この平均を“多試験平均”とよび, 括弧 $\langle \rangle$ を用いて表わすことにすると,

$\bar{\eta} = \langle \bar{x} \rangle, s_{\eta} = \langle s_x \rangle$ となる. ゆえに, 受験生 i の点数 η_i は次式で与えられる.

$$\eta_i = \langle \bar{x} \rangle + \langle s_x \rangle z_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (15)$$

これなら, 誰にとっても公平で受入れ易い点数といえるのではないだろうか. また, 各テストの得点分布が正規分布に近い場合には, ξ_j を重ね合せた拡大得点 η の分布もまた正規分布に似たものになると予想される.

付録 1 に簡単なモデル計算の結果を示す. そこでは, 2 回の試験($q=2$)を想定し, 得点 x_1, x_2 , 拡大得点 ξ_1, ξ_2 , 2 試験平均 $\eta = (\xi_1 + \xi_2)/2$ の度数分布図を描いている. それぞれの成り立ちを踏まえながら比べてみることは興味深い.

5. 適用限界

まずこれまでの内容を簡単にまとめる. 相対評価に使われる統一基準は, 通例 $a + bz$ の形に表わされる. ここで定数 b は標準値 z の拡大率に相当し, a は一様な“ずらし”を表わす. また, 定数 a と b の選び方如何により異なる基準が作られる. 例えば偏差値 T は, $T = 50 + 10z$ で与えられ, 2 つの定数には無名数が選ばれている. では, 点数表示を可能にする統一基準の場合, a や b にどのような値を選ぶことができるのだろうか. これに答えるために, 本稿では標準化変換に立ち返り, 換算点を求めることから始めた. その結果, 次のことが見出された.

[1] 得点と換算点とから作られる“拡大得点系”は統一基準となりうる. このとき, j 回目の試験を受けた (または, 他から換算された) i 番目の学生の点数は $\xi_{ji} = \overline{x_j} + s_j z_i$ ($j=1, \dots, q; i=1, \dots, n$) と表わされる. ここに, $\overline{x_j}$ は j 回目の試験の平均点, s_j は標準偏差である.

[2] 拡大得点 ξ_j の重ね合せ $\sum \lambda_j \xi_j$ ($\equiv \eta$) が導く拡大得点系もまた統一基準となりうる. このとき, 個人の点数は $\eta_i = \bar{\eta} + s_{\eta} z_i$ と表わされる. ここに, $\bar{\eta} = \sum \lambda_j \overline{x_j}$, $s_{\eta} = \sum \lambda_j s_j$ である. ただし具体的に係数 λ_j を決定するには, さらに別の条件が必要である. 例えば, η_i を, 公平な印象を与える点数とするには, $\lambda_j = 1/q$ ($j=1, \dots, q$) と採る“多試験平均”が好い. このように, 重ね合わせの係数 λ の任意性は, 目的に適合した基準を得るために役立てることができる.

つぎに基準の適用限界について考える. 上でみたように, 標準値 z , 偏差値 T , さらに拡大得点 ξ_j や η は, 機能においてみな同等である. したがって, これらの適用限界もまた同等である. 他方, 偏差値の適用条件は“得点分布が正規分布から極端に離れていないこと”として知られる. 理由は, 正規分布に近いとき, 偏差値がその機能を正しく発揮するからである. いいかえれば, 相対評価ではどの試験が導く標準値 z も互いに矛盾してはならず, それを保証するのが正規分布に近いときだということである (第 1 節で, これを暗黙の了解とした).

こうしたことから, 本稿で提示した“点数表示法”の適用限界として, 「異なる試験の得点分

布はすべて正規分布から懸け離れたものであってはならない」が結論される。平たくいえば、この方法を用いる際には、“どのテストの得点分布も概ね釣鐘型になっていること”を確かめなければならない。また、そうなるように、個々の出題者は難易を取り合わせて、偏りのない問題を作ることが望ましい。

付録1 モデル計算

最小のモデルとして2回の試験を想定する。受験者数は、試験1が97人、試験2が105人である。（使用した得点データをこの付録の末尾に掲載する。）

次表に平均と標準偏差の計算結果を示す。「試験1 拡大」とは、試験1の得点に試験2からの換算点を付け加えた試験1の拡大得点系のことであり、本文中の記号では τ_1 にあたる。

得点系	試験1 t_1	試験1 拡大 τ_1	試験2 t_2	試験2 拡大 τ_2	2 試験平均
変数 (得点)	x_1	ξ_1	x_2	ξ_2	$\eta = (\xi_1 + \xi_2)/2$
平均	81.04	81.04	72.16	72.16	76.60
標準偏差	5.54	5.54	7.72	7.72	6.63

上記変数に対する得点分布を描こう。ここで用いる原得点 x_1 、 x_2 のデータはすべて整数値である。しかし、データを使って算出される換算点は、一般に小数部を有する値となる。そのた

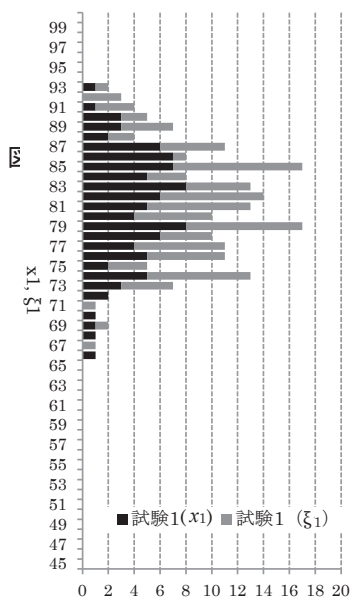


図1 得点 x_1 と拡大得点 ξ_1 の分布

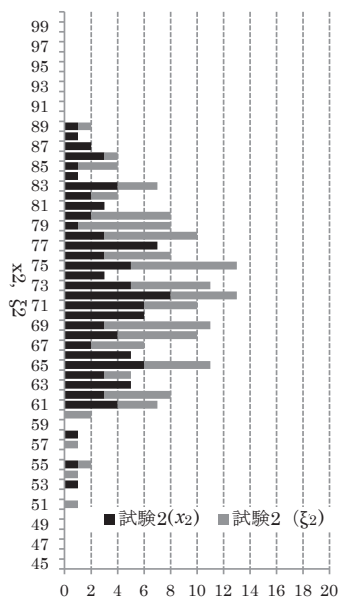


図2 x_2 と ξ_2 の分布

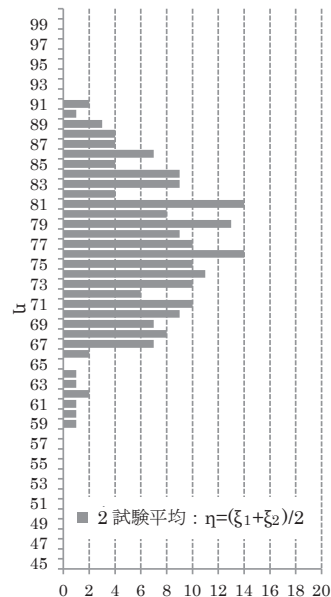


図3 2試験平均 η の分布

め拡大得点 ξ_1 , ξ_2 の度数を求める際には, まず換算点の値をすべて四捨五入によって整数化することが必要になる. 換算点に対するこうした処理は, 厳密さを多少損ねるが, 現実的にはやむを得ない. 図 1 の横棒グラフは, 試験 1 の得点 x_1 と拡大得点 ξ_1 の度数分布である. 数値軸は人数を表わす. 黒色の棒の長さが, x_1 の各値 (点数) での人数を表わす (合計 97 人). また灰色の棒は ξ_1 に対応し, 得点分布の両裾の一部を除き, 完全にあるいは部分的に黒色の棒と重なっている (合計 202). つまり, 図に見えている灰色の断片の長さは, 換算処理を経て試験 2 から取り込まれた, 各値での人数に相当する (その合計は 105). 同様に図 2 では, 試験 2 の原得点 x_2 (黒色) と拡大得点 ξ_2 (灰色) の分布を重ねて示している. 灰色の断片は, 試験 1 から各値へ取り込まれた人数に対応する (その合計は 97).

図 3 は, 2 試験平均された拡大得点 $\eta = (\xi_1 + \xi_2)/2$ の得点分布 (度数分布) である. この平均と標準偏差は, それぞれ, ξ_1 と ξ_2 の各値の相加平均に一致している【上表参照】.

拡大得点 ξ_1 , ξ_2 および η の実現値として算出される個人の点数は, “点数を用いる相対評価” のために使用することができる. 図 1~3 を比較すると分かるように, 総体的に高得点をつけるには, 拡大得点系 τ_1 の点数を使えばよい. ただし, 先述のとおり, 多試験平均による得点系にも良いところはある. 最終的にどの拡大得点系を選ぶかは評価する側の判断しだいである.

試験 1										得点一覧 (97 人)										試験 2										得点一覧 (105 人)																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
82	73	73	86	85	80	87	86	88	90																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														

付録 2 式の導出

【式 (8), (9) の導出】

まず, 総受験者数 $n = n_1 + \dots + n_q$ であること, および省略表記 $s_j = s_{x_j}$ に注意する.

拡大得点系の得点 (変数) ξ_j ($j = 1, \dots, q$) の平均を計算する. 途中で式 (5) と式 (4.1) を使う.

$$\begin{aligned}
 \overline{\xi_j} &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_{ji} \\
 &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} x_{1ji} + \dots + \sum_{i=1}^{n_j} x_{jji} + \dots + \sum_{i=1}^{n_q} x_{qji} \right\} \\
 &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} (\overline{x_j} + s_j z_{1i}) + \dots + \sum_{i=1}^{n_j} (\overline{x_j} + s_j z_{ji}) + \dots + \sum_{i=1}^{n_q} (\overline{x_j} + s_j z_{qi}) \right\} \\
 &= \overline{x_j}
 \end{aligned}$$

次に、積率 $m_r(\xi_j)$ を計算する．このとき式(4-1), (4-2)を使う．次式 4 行目の右端に現れている添字 1 つの標準値 $z_i(i=1,\cdots,n)$ では、式(9)の下で説明した添字の付け替えを行っている．

$$\begin{aligned}
 m_r(\xi_j) &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_{ji} - \overline{\xi_j})^r \\
 &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n_l} (x_{1ji} - \overline{x_j})^r + \cdots + \sum_{i=1}^{n_j} (x_{jji} - \overline{x_j})^r + \cdots + \sum_{i=1}^{n_q} (x_{qji} - \overline{x_j})^r \right\} \\
 &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n_l} (s_j z_{1i})^r + \cdots + \sum_{i=1}^{n_j} (s_j z_{ji})^r + \cdots + \sum_{i=1}^{n_q} (s_j z_{qi})^r \right\} \\
 &= s_{x_j}^r \cdot \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n_l} z_{1i}^r + \cdots + \sum_{i=1}^{n_j} z_{ji}^r + \cdots + \sum_{i=1}^{n_q} z_{qi}^r \right\} = s_{x_j}^r \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^r \\
 &= s_{x_j}^r \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^q n_j \alpha_r(x_j)
 \end{aligned}$$

ここで、 $r=2$ とおき、 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 1$ あるいは $\alpha_2(x_j) = 1$ ($j=1,\cdots,q$) を使うと、

$$m_2(\xi_j) = s_{\xi_j}^2 = s_{x_j}^2$$

ゆえに、 $s_{\xi_j} = s_{x_j}$ ．

なお、積率特性値 $\alpha_r(\xi_j)$ は積率 $m_r(\xi_j)$ を用いて定義される．従って、上の結果から

$$\alpha_r(\xi_j) = \frac{m_r(\xi_j)}{s_{\xi_j}^r} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^q n_j \alpha_r(x_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^r \quad (j=1,\cdots,q)$$

となる．これは標準値 z の r 乗の平均であり、試験の番号 j に依存しない．

【式(12)の導出】

拡大系の変数 ξ_j ($j=1,\cdots,q$) の 1 次結合を $\eta \equiv \sum_{j=1}^q \lambda_j \xi_j$ とする．この平均は

$$\overline{\eta} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \lambda_j \xi_{ji} = \sum_{j=1}^q \lambda_j \overline{\xi_j} = \sum_{j=1}^q \lambda_j \overline{x_j}$$

また、分散は

$$\begin{aligned}
 s_{\eta}^2 &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \overline{\eta})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^q \lambda_j (\xi_{ji} - \overline{\xi_j}) \right\}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^q \lambda_j (\xi_{ji} - \overline{x_j}) \right\}^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^q \lambda_j s_{x_j} z_i \right\}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(\sum_{j=1}^q \lambda_j s_{x_j} \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^q \lambda_j s_{x_j} \right)^2
 \end{aligned}$$

となる．よって，標準偏差 $s_\eta = \sum_{j=1}^q \lambda_j s_{x_j}$ ．

この結果へは別の途からでも到達できる．そのために，拡大得点 ξ_j と ξ_k の共分散 $s_{\xi_j \xi_k}$ を導入する．すると，次の結果が得られる．

$$\begin{aligned} s_{\xi_j \xi_k} &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_{ji} - \bar{\xi}_j)(\xi_{ki} - \bar{\xi}_k) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} (x_{1ji} - \bar{x}_j)(x_{1ki} - \bar{x}_k) + \cdots + \sum_{i=1}^{n_j} (x_{jji} - \bar{x}_j)(x_{jki} - \bar{x}_k) + \cdots + \sum_{i=1}^{n_q} (x_{qji} - \bar{x}_j)(x_{qki} - \bar{x}_k) \right\} \\ &= \frac{1}{n} s_{x_j} s_{x_k} \left(\sum_{i=1}^{n_j} z_{li}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n_j} z_{ji}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n_q} z_{qi}^2 \right) = s_{x_j} s_{x_k} \end{aligned}$$

よって，相関係数 $r_{\xi_j \xi_k} \equiv s_{\xi_j \xi_k} / (s_{\xi_j} s_{\xi_k}) = 1$ となる．これは， ξ_j と ξ_k が最強の正の相関関係にあることを意味する．じっさい，式(10)の 1 行目の連比は， $\xi_j \xi_k$ 平面 ($j \neq k$) における総てのデータ点 $(\xi_{ji}, \xi_{ki}) ; i=1, \dots, n$ が，直線の上に載っていることを示している．

結局，式(12)の第 2 式は，この共分散の性質を用いることによって導くことができる：

$$\begin{aligned} s_\eta^2 &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^q \lambda_j (\xi_{ji} - \bar{\xi}_j) \right\}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^q \lambda_j (\xi_{ji} - \bar{\xi}_j) \right\} \sum_{k=1}^q \lambda_k (\xi_{ki} - \bar{\xi}_k) \} \\ &= \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q \lambda_j \lambda_k s_{\xi_j \xi_k} = \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q \lambda_j \lambda_k s_{x_j} s_{x_k} = \left(\sum_{j=1}^q \lambda_j s_{x_j} \right)^2 \end{aligned}$$

