

円順列への群論の応用

斎藤 敏之

1. 序論

大学数学の中で最も基礎的な分野の一つに群論がある。群論は物理学や化学において、対称性などを調べる際にとても役立つ理論である。ところが、一般の群論の入門書や解説書は高度に抽象化されていて、数学を専門にしない者には非常に難解である。そこでこのノートでは、高校レベルの円順列の問題に群論を応用することにより、群論のしくみを理解することを試みる。なお最初に念頭におく円順列の問題は、平成25年度四天王寺大学一般入学試験で出題されたものである。問題の概略は以下の通りである。

【問】 円周上に9つの点を等間隔に並べる。そして3つの点を選んで直線で結び三角形を作る。ただし、円にそって三角形を回転させて2つの三角形が重なるとき、これらは同じものとする(図1)。このようにしてできる三角形は何通りあるか。

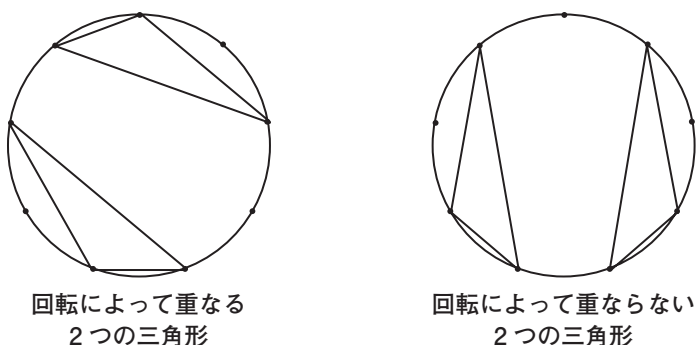


図1. 2つの三角形の関係

高校生に対する問題なので、すべての場合を数え上げることによって答えを導き出すことができ、略解は以下のとおりである。

【答】 この問題を解くポイントは、3つの点の位置ではなく、3つの点によって分けられる弧の長さを調べることである。弧の長さが決まれば三角形の辺の長さが決まるからである。円周上隣り合う2点間の弧の長さを1とし、図2のように3点を選んだとき、3つの弧の組み合わせを $[abc]$ と書くことにする。回転によって重なる場合は同じ三角形とみなすので、 $[abc]$ と $[bca]$, $[cab]$

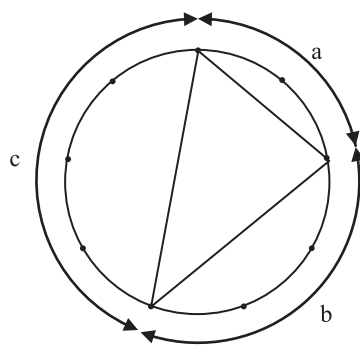


図2. 弧の長さで数える

は同じである。また $a+b+c=9$ を満たす。このような 3 つの弧の組み合わせを数えていくと、[117], [126], [135], [144], [153], [162], [225], [234], [243], [333] の 10 通り であることがわかる。■

この方法では、円周を等分する点の数を増やしたり、三角形を四角形などの多角形に変えると、数え上げることはかなり面倒になる。そこでこのノートでは群論を応用して、より一般的に解答する方法を紹介する。またその方法とは別にコーシー・フロベニウスの定理（旧称バーンサイドの定理）を用いると更に一般的な問題に応用できるので、第 4 章以降で紹介する。この定理はインターネットで検索するとすぐに見つかるのだが、一般の群論の入門書や解説書では、筆者は寡聞にして目にしたことがないので、定理の証明を含めて紹介する。

2. 数学的準備

この章では円順列を考える際に必要となる、群論の基礎概念を記す。内容の大半は、多くの参考書^{1,2,3,4)} に載っている事柄なので、証明を省略している。

2-1. 群の定義

空でない集合 G に乗法または積と呼ばれる演算が定義されているとする。ここでは、 $x, y \in G$ に対して積を xy と書く。一般に積は非可換（ $xy \neq yx$ ）である。 G が次の 3 つの条件を満たすとき、**群**という。

(a1) G の 3 つの元 a, b, c に対して、

$$a(bc) = (ab)c \quad (2-1)$$

が成り立つ（**結合則**）。

(a2) 単位元と呼ばれる元 e があり、すべての元に対して

$$ae = ea = a \quad (2-2)$$

が成り立つ（**単位元**の存在）。

(a3) すべての元 a に対して G の元 a^{-1} が存在し、

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e \quad (2-3)$$

が成り立つ（**逆元**の存在）。

元の個数が有限であるような群を**有限群**といい、その個数を群の**位数**といい、 $|G|$ で表す。

2-2. 対称群

円を n 等分し、各点に番号を付け（図 3）、これらの点の上に玉を置く。玉には色が付いていても番号が書いてあってもかまわない。

次に、玉の入れかえを考える。玉の入れかえ方は全部で $n!$ 通りあり、その全体から成る群を n 次の**対称群**といい、記号 S_n で表す。

点 1 の玉を点 2 に移動し、点 2 の玉を点 3 に移動し、点

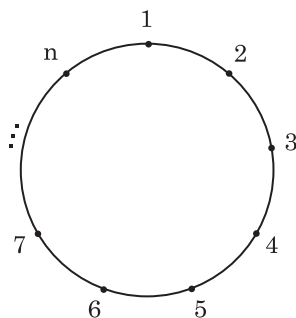


図 3. 円を n 等分する

3の玉を点1に移動するとき,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

と書き表すことにする. 単位元は,

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n \\ 1 & 2 \cdots n \end{pmatrix} \quad (2-5)$$

である. 2点間で玉を入れかえるとき,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots n \\ 2 & 1 & 3 \cdots n \end{pmatrix} = (1 \ 2)$$

のように簡略化して表す. また点1から点 n まで, 時計回りに1つつ玉を移動していくときは, $(1 \ 2 \cdots n)$ と書く.

$$(1 \ 2 \cdots n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

このノートでは積は右から左へ演算すると約束する. 例えば S_n の元 $a = (1 \ 2), b = (1 \ 3)$ の積 ab は,

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

である. 最後に, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ の逆元は $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ である.

2-3. 巡回群

$c = (1 \ 2 \cdots n)$ とすると, c は円周上の玉を1つつ時計回りに移動することだったので, これを n 回繰り返せば, 玉の並びは元に戻る. つまり $c^n = e$ である. m を自然数とすると, c^m 全体の集合 C_n は群を成す. これを**巡回群**といい, c を C_n の生成元という. また, $c^r = e$ を満たす最少の r を c の**位数**という.

2-4. 剰余類

最初に同値関係を定義する. 集合 M 上の関係 $\sim$ が, 次の3つの関係を満たすとき, **同値関係**という. 以下において a, b, c は M の元とする.

- (b1) $a \sim a$ (反射律)
- (b2) $a \sim b$ なら $b \sim a$ (対称律)
- (b3) $a \sim b, b \sim c$ なら $a \sim c$ (推移律)

a と同値関係にある元を集めた部分集合,

$$C(a) = \{b \in M \mid a \sim b\} \quad (2-8)$$

を a の**同値類**といい, 種になった元 a を**代表元**という. 2つの同値類は完全に一致するか, 全く異なるかのどちらかなので, 集合 M は同値類によって分割することができる. これを同値類による**類別**という. 各同値類から代表元を1つつ集めて作った M の部分集合 R を同値関係～

の完全代表系という。そして、

$$M = \bigcup_{x \in R} C(x) \quad (2-9)$$

の関係がある。

次に剰余類について記す。まず、群 G の部分群 H が与えられているとする。そして a, b は群 G の元とし、 $a^{-1}b \in H$ とする。この関係により $a \sim b$ を定義し、 G に同値関係 $\sim$ を導入する。するとある $h \in H$ が存在して $b = ah$ と書けるので、 $a \sim ah$ である。したがって、 G の部分集合 aH を

$$aH = \{ah \mid h \in H\} \quad (2-10)$$

で定義すると aH は a を代表元とする同値類になる。これを a の H による左剰余類という。同様に Ha によって同値類を与えることもでき、 a の H による右剰余類という。

$a = e$ ならば、 $eH = H$ となり部分群 H そのものになる。

a と b が同値でないならば、 aH と bH は異なる剰余類となり、 $aH \cap bH = \emptyset$ である。対偶をとって $aH \cap bH \neq \emptyset$ ならば、 $aH = bH$ である。

G は H によって類別できるので、 H による剰余類の集合を G/H と書くことにし、その元の数を $|G : H|$ と表す。すると G の元の個数と、 H と G/H の元の個数の間には次の関係が成り立つ。

$$|G| = |G : H| \cdot |H| \quad (2-11)$$

これをラグランジュの定理という。

2-5. 軌道

群 G が集合 M 上に作用しているとする。 x を M の元とし、 $g \in G$ が x に作用することを $g(x)$ と書くことにすると、 x の G による軌道 (G -軌道)^{1,3,4,5)} は、

$$G(x) = \{g(x) \mid g \in G\} \quad (2-12)$$

で定義される。

【命題2-1】 $x, y \in M$ に対して $y \notin G(x)$ ならば、 $G(x) \cap G(y) = \emptyset$ である。

【証明】 対偶をとって $G(x) \cap G(y) \neq \emptyset$ とすると、 $z \in G(x) \cap G(y)$ を満たす $z \in M$ が存在する。 $z \in G(x)$ より、ある G の元 g_1 が存在して $z = g_1(x)$ と表される。同様に、 $z \in G(y)$ より、ある G の元 g_2 が存在して $z = g_2(y)$ と表される。したがって、 $g_1(x) = g_2(y)$ となるので $g_2^{-1}g_1(x) = y$ となり、 $y \in G(x)$ となる。 ■

【命題2-2】 $x, y \in M$ に対して $y \in G(x)$ ならば、 $G(x) = G(y)$ である。

【証明】 $y \in G(x)$ より、 $g_1 \in G$ が存在して、 $y = g_1(x)$ と表される。そして $z \in G(y)$ ならば、ある $g_2 \in G$ が存在して $z = g_2(y) = g_2g_1(x)$ であるから、 $z \in G(x)$ となり、 $G(x) \supset G(y)$ が導かれる。また $z' \in G(x)$ ならば $g_3 \in G$ が存在して $z' = g_3(x)$ と表せるので、 $x = g_1^{-1}(y)$ により $z' = g_3g_1^{-1}(y)$ となり、 $z' \in G(y)$ となるので、 $G(y) \supset G(x)$ が導かれる。したがって $G(x) = G(y)$ である。 ■

x, y を M の元とし、集合 M 上の同値関係 $x \sim y$ を G -軌道により $y \in G(x)$ で定義すると、

この同値関係により集合 M を類別することができる.

次に G を有限群として, x の固定部分群 G_x を

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\} \quad (2-13)$$

で定義する. x の G による軌道と固定部分群 G_x の間には密接な関係がある^{3,4,5)}.

【命題2-3】 関係式 $|G_x| \times |G(x)| = |G|$ が成り立つ.

【証明】 x の G -軌道が集合 M の部分集合とし, n 個の元から成るとする.

$$G(x) = \{x, x_2, x_3, \dots, x_n\} \quad (2-14)$$

元 x を x_i に移す G の元が 2 つあるとして g_a, g_b とすると $g_a(x) = x_i, g_b(x) = x_i$ と表すことができるので,

$$g_a^{-1} g_b(x) = x \quad (2-15)$$

であり $g_a^{-1} g_b \in G_x$. これを書き直すと, $g_b \in g_a G_x$ となるので, g_b は g_a の G_x による左剰余類に属している. つまり G -軌道の元 x_i と剰余類 $g_i G_x$ には以下の対応関係がある.

$$\begin{aligned} g \in e G_x & \leftrightarrow x = g(x) \\ g \in g_2 G_x & \leftrightarrow x_2 = g(x) \\ & \dots \\ g \in g_n G_x & \leftrightarrow x_n = g(x) \end{aligned} \quad (2-16)$$

この対応関係より

$$|G : G_x| = |G(x)| \quad (2-17)$$

となり, ラグランジュの定理を用いて $|G_x| \times |G(x)| = |G|$ の関係が導かれる. ■

2-6. 両側剰余類

H, K を群 G の部分群とする. $g_1, g_2 \in G$ に対し $h \in H$ と $k \in K$ が存在し, $g_2 = h g_1 k$ であるとき, 同値関係 $g_1 \sim g_2$ を定義する. $h = k = e$ とすれば, $g = e g e$ となり, 反射律 $g \sim g$ を満足する. また, $h^{-1} \in H$ と $k^{-1} \in K$ により $g_1 = h^{-1} g_2 k^{-1}$ となるので, 対称律 $g_2 \sim g_1$ を満たす. g_3 に対して $h' \in H$ と $k' \in K$ が存在し $g_3 = h' g_2 k'$ ならば, $g_3 = h' h g_1 k k'$ であり, $h' h \in H, k k' \in K$ であるから, $g_1 \sim g_3$ が導かれ, 推移律を満たす. 以上より同値関係が成り立つための 3 つの条件を確認できた.

$a \in G$ の同値類を HaK と書き, a の H, K による両側剰余類という^{1,2)}.

両側剰余類によって群 G を類別できるので, 完全代表系を $R = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ とし, n 個の元から成るとする. この完全代表系の元 $a_1, a_2, \dots, a_n$ の K による左剰余類の集合を $\Sigma = \{a_1 K, a_2 K, \dots, a_n K\}$ とする. Σ は K による左剰余類の集合 G/K の部分集合である. $g \in G$ の K による左剰余類 $\alpha = gK$, $h \in H$ とするとき, 群 H の集合 G/K 上への作用を $h(\alpha) = h\alpha = hgK$ で定義する. 以下では群 H を集合 Σ 上へ左から作用させる.

まず見やすくするために $\alpha_1 = a_1 K, \alpha_2 = a_2 K, \dots, \alpha_n = a_n K$ と書き直す. そして α_i の H による軌道を考える. α_i の固定部分群 H_{α_i} の元 x は $x(\alpha_i) = \alpha_i$ を満たす. これを書き直すと $xa_i K = a_i K$ であるから $a_i^{-1} xa_i K = K$ となる. $e \in K$ であるから, ある k が存在して, $a_i^{-1} xa_i k = e$ となる. これより $x = a_i k^{-1} a_i^{-1} \in a_i K a_i^{-1}$ となる. さて $x \in H_{\alpha_i} \subset H$ であった

から, $x \in H \cap a_i K a_i^{-1}$ であり, したがって $H_{\alpha_i} \subset H \cap a_i K a_i^{-1}$ となる.

逆に $y \in H \cap a_i K a_i^{-1}$ ならば, ある $k' \in K$ を用いて $y = a_i k' a_i^{-1}$ と表すことができるので,

$$y(\alpha_i) = y \alpha_i = y a_i K = a_i k' a_i^{-1} a_i K = a_i k' K = a_i K = \alpha_i \quad (2-18)$$

となり, $y \in H_{\alpha_i}$. したがって $H \cap a_i K a_i^{-1} \subset H_{\alpha_i}$ となるので, 最終的に

$$H_{\alpha_i} = H \cap a_i K a_i^{-1} \quad (2-19)$$

を得る. ここで命題2-3を用いると,

$$|H| = |H_{\alpha_i}| \cdot |H(\alpha_i)| \quad (2-20)$$

である. $G = \bigcup_i H a_i K = \bigcup_i H(\alpha_i)$ であるから,

$$|G| = \sum_i |H(\alpha_i)| \cdot |K| = \sum_i |H| \cdot |K| / |H \cap a_i K a_i^{-1}| \quad (2-21)$$

という関係式が得られる. 特にすべての i について $H \cap a_i K a_i^{-1} = \{e\}$ ならば,

$$|G| = n |H| \cdot |K| \quad (2-22)$$

となる.

3. 円順列への応用

この章ではいくつかの例題を示すことにより, 円順列への群論の応用例を紹介する.

3-1. 円周を9等分して3点を結び三角形をつくる

この節では第1章で述べた, 円周を9等分して3点を結んでできる三角形の数を調べる. ただし, 円周上を回転させて重なるものは同じ三角形とみなす.

まず, 9つの点に番号をつける (図4). これらの点の上に1, 2, 3と書かれた赤いカードと4, 5, ..., 9と書かれた白いカードをのせる. のせ方は全部で9!通りある. そして, 赤いカードがのった点を直線で結んで三角形をつくる (図5-1).

次に以下の手順でカードを並べかえる.

- (1) あるルールに則ってその三角形とすべてのカードを回転する. 例えば, 一番短い辺が点1から (点2の方向へ) 始まるようにする (図5-2).
- (2) 赤いカードが点1, 点2, 点3の上にあるように, 赤いカードと白いカードを並べかえる (図5-3).
- (3) 円周上の点の数字とカードの数字が一致するように並べかえる (図5-4).

以上の並べかえによって, 円周上の9つの点にどのようにカードを置いても, 最終的に円周上の点の数字とカードの数字が一致するように並べかえることができる. つまりこの手順の逆の並べかえをしていくと, 初めに点1, 点2, 点3上にあった赤いカードを任意の位置に移動できることになる. そして, 赤いカードがのっている点を結べば三角形ができる. その場合の数は全部で9!通りであり, そのカードの並べかえは対称群 S_9 を成す.

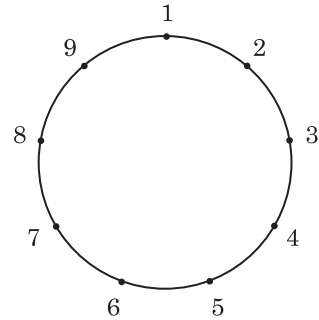


図4. 円を9等分し番号をつける

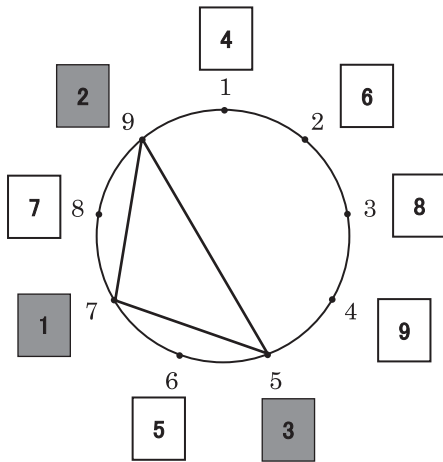


図 5-1 円周上にカードを置く

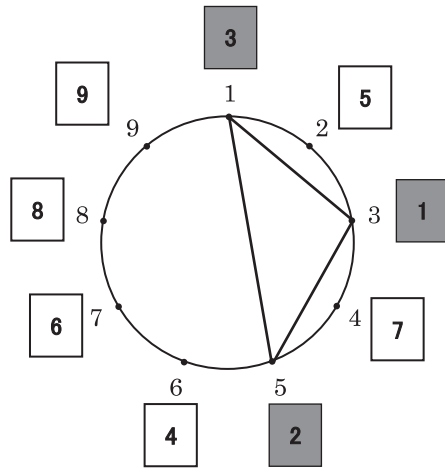


図 5-2 三角形の一番短い辺が点 1 から始まるようにカードを回転する

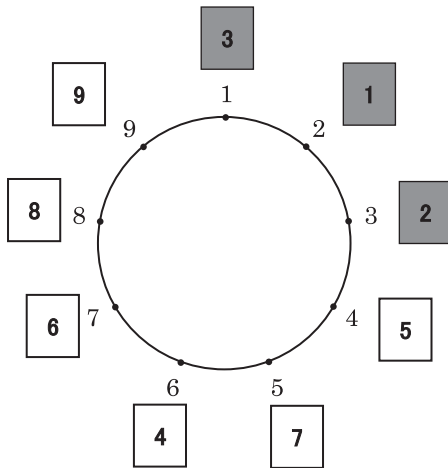


図 5-3 点 1 ～ 3 の上に赤いカードが
のるように並べかえる

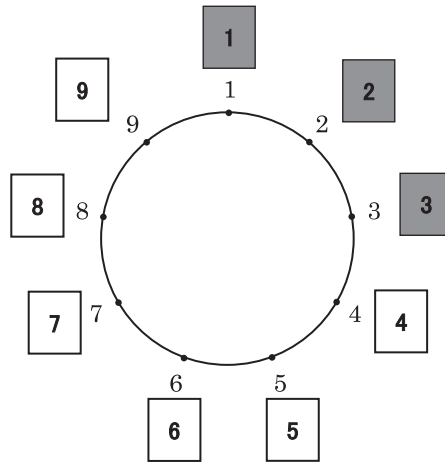


図 5-4 円周上の点の数字とカードの数字が
一致するように並べかえる

そこで今度は上述の手順とは逆に、円周上に順番にカードが並んでいる状態から、任意の位置にカードを移動するときの様子を確認する。

- (i) 点 1, 点 2, 点 3 上の赤いカードを並べかえ, 点 4 ～ 点 9 上の白いカードを並べかえる. 赤いカードの並べかえは対称群 S_3 を成すが, 円周上の点 1, 点 2, 点 3 の間の並べかえであることがはっきりとわかるように, ここでは $S_3(1,2,3)$ と書くことにする. 同様に, 点 4 ～ 点 9 上の白いカードの並べかえは, 対称群 $S_6(4,5,6,7,8,9)$ を成す. したがって, ここでの並べかえ σ は, $\sigma \in S_3(1,2,3) \times S_6(4,5,6,7,8,9)$ である. また $S_3 \times S_6$ は S_9 の部分群になっている.

(ii) 赤いカードを結んでできる三角形が与えられた条件を満たすように、赤いカードと白いカードを入れ替える。この並べかえを $a \in S_9$ とする。

(iii) 最後に回転する。これは $c_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$ を生成元とする巡回群

$C_9 = \{e, c_1, c_1^2, \dots, c_1^8\}$ の元であり、 $c \in C_9$ とする。なお、 C_9 は S_9 の部分群である。

一連の手順は $g = ca\sigma \in C_9 a(S_3 \times S_6) \subset S_9$ となる。 σ は赤いカードの並べかえと白いカードの並べかえであり、 c は回転操作であるから、三角形の形は並べかえ a により決まる。したがって、 g によってできる三角形と、 g' によってできる三角形が同じ形になるのは、ある $c' \in C_9$ と $\sigma' \in S_3 \times S_6$ があって、 $g = c'g'\sigma'$ の関係が成り立つときである。これにより同値関係が定義できるので、 a の C_9 と $S_3 \times S_6$ による両側剰余類が得られる。代表元 a により、

$$S_9 = \bigcup_a C_9 a (S_3 \times S_6) \quad (3-1)$$

と表されるので、円周を 9 等分して 3 点を結び三角形を求める問題は、 S_9 を C_9 と $S_3 \times S_6$ により両側剰余類で類別する問題に帰着する。

それでは実際に三角形の数を求めてみる。式 (2-21) より、

$$|S_9| = \sum_a |C_9 \cdot |S_3(1,2,3) \times S_6(4, \dots, 9)| / |C_9 \cap a(S_3(1,2,3) \times S_6(4, \dots, 9))a^{-1}| \quad (3-2)$$

と表すことができる。ここで $|S_9| = 9!$ 、 $|C_9| = 9$ 、 $|S_3 \times S_6| = 3!6!$ はすぐにわかるが、問題は最後の分母の $|C_9 \cap a(S_3(1,2,3) \times S_6(4, \dots, 9))a^{-1}|$ である。これは回転と並べかえに共通な元の個数である。

円周を 9 等分する場合、分割数 9 と三角形の頂点数 3 の公約数は 1 と 3 であるが、3 の場合、回転角が $\frac{2\pi}{3}$ 、 $\frac{4\pi}{3}$ 、 2π の 3 つの回転に対して不変な三角形が存在する。それは正三角形である。これらの回転は巡回群の元を用いると、

$$e = \begin{pmatrix} 147 \\ 147 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 258 \\ 258 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 369 \\ 369 \end{pmatrix}, c_1^3 = \begin{pmatrix} 147 \\ 471 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 258 \\ 582 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 369 \\ 693 \end{pmatrix}, c_1^6 = \begin{pmatrix} 147 \\ 714 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 258 \\ 825 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 369 \\ 936 \end{pmatrix}$$

で表される。これらの元は $S_3(1,4,7) \times S_3(2,5,8) \times S_3(3,6,9)$ に属しており、回転による並べかえを赤いカードの並べかえと白いカードの並べかえによってもできることを意味する。

例えば $a = (2\ 4)(3\ 7)$ とすると、 $k \in S_3(1,2,3) \times S_6(4, \dots, 9)$ が e 、 $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 8)(7\ 6\ 9)(2\ 1\ 3)(5\ 4\ 8)(6\ 7\ 9)$ のときに、 aka^{-1} が e, c_1^3, c_1^6 に等しくなる。つまり正三角形が描けるように並べかえ a を選んだ場合、 $|C_9 \cap a(S_3(1,2,3) \times S_6(4, \dots, 9))a^{-1}|$ は『正三角形の回転対称な角度の数』と解釈でき、円周の分割数と図形の頂点数の公約数になる。

ここで $c_1^3 = aka^{-1}$ が成り立つときに、赤いカードが点 1、点 4、点 7 上にあるとして、 $k \in S_3(1,2,3) \times S_6(4, \dots, 9)$ であることを確認する。簡単のため赤いカードの移動のみ考える。

$\{j_1, j_2, j_3\} = \{1, 4, 7\}$ とすると、 $k = a^{-1}c_1^3a = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 147 \\ 471 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \in S_3(1,2,3)$ となる。

白いカードの移動は、残りのカードの移動なので $S_6(4, \dots, 9)$ の元で表すことができる。したがって $k \in S_3(1,2,3) \times S_6(4, \dots, 9)$ となる。 aka^{-1} が c_1^6, e に等しい場合、赤いカードが点

2, 点5, 点8または点3, 点6, 点9に置かれた場合も同様に確認できる.

以上で, 正三角形を描けるように並べかえ a を選んだ場合は

$$\left| C_9 \cap a(S_3(1,2,3) \times S_6(4,\dots,9))a^{-1} \right| = 3 \quad (3-3)$$

となることが示せた.

最後に円周の分割数9と三角形の頂点の数3の公約数3と1のうち, 1の場合を考える. このときは, 三角形が回転対称ではない形になるように a が選ばれている. したがって,

$$\left| C_9 \cap a(S_3(1,2,3) \times S_6(4,\dots,9))a^{-1} \right| = |\{e\}| = 1 \quad (3-4)$$

となる. そのような三角形の数を x とおくと, 式 (3-2) は次のようになる.

$$9! = x \times 9 \times 3!6! + \frac{9}{3} \times 3!6! \quad (3-5)$$

この式を解くと $x = 9$ が得られるが, これに正三角形の数1を足すと10になり, 答えは10通りとなる. ■

3-2. 円周を n 等分して m 点を結び m 角形をつくる (ただし n と m は互いに素とする)

n と m が互いに素の場合, k を整数として, 円周を $\frac{2k\pi}{n}$ 回転したときに不変な m 角形はない. したがって, m 角形をつくるどのような並べかえ a に対しても

$$C_n \cap a(S_m \times S_{n-m})a^{-1} = \{e\} \quad (3-6)$$

となるので, m 角形の数を x とおくと, $|S_n| = \sum_a |C_n| \cdot |S_m \times S_{n-m}|$ は,

$$n! = x \times n \times m! \times (n-m)! \quad (3-7)$$

となり, x について解くと答えは $\frac{(n-1)!}{m!(n-m)!}$ となる. ■

3-3. 円周を 8 等分して白玉 4 個と黒玉 4 個を置く

次に円周を 8 等分して白玉 4 個と黒玉 4 個を置く円順列の問題を考える. 黒玉を順番に線分で結べば四角形ができるので, 三角形の場合と同様に解くことができる.

まず, 玉の置き方全体が成す集合は S_8 である. 白玉の並べかえと黒玉の並べかえ全体が成す集合は $S_4 \times S_4$ であり, 回転については $c_1 = (1\ 2 \cdots 8)$ を生成元とする巡回群 C_8 である.

$|S_8| = 8!$, $|S_4 \times S_4| = 4!4!$, $|C_8| = 8$ である.

そして4と8の公約数は1, 2, 4の3つである. 2の場合は, $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 回転対称な四角形のことであり, これは長方形である. 第1章の記法を用いると, この長方形は [1313] と表すことができ, しかもこれ1つだけである. 4の場合は $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 回転対称な四角形, すなわち正方形である. もちろん正方形は1種類だけである. 1の場合は回転非対称な四角形であり, その数を x として式 (2-21) に代入すると,

$$8! = \left(8x + \frac{8}{2} + \frac{8}{4}\right) \times 4!4! \quad (3-8)$$

となり, $x=8$ が得られる. 長方形と正方形の分を足して, 答えは10通りとなる. 実際に第1章の方法で数えてみると, [1115], [1124], [1133], [1142], [1214], [1223], [1232] [1313], [1322], [2222] の10通りであることが確認できる. ■

3-4. 円周を18等分して12点を結び12角形をつくる

円周を18等分して12点を結んで12角形を作る円順列の問題を考える. ただし, 回転して重なる2つの図形は同一とする.

前問と同様にして, 12個の黒玉と6個の白玉の並べ方全体が成す集合は S_{18} である. 黒玉の並べかえと白玉の並べかえ全体が成す集合は $S_{12} \times S_6$ であり, 回転については $c_1 = (1\ 2 \cdots 18)$ を生成元とする巡回群 C_{18} である.

そして12と18の公約数は6, 3, 2, 1の4つである. そこで, $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 回転に對して不変な図形を求める.

(1) $\frac{\pi}{3}$ 回転に対して不変な図形は, 第1章の記法を用いて [12 12 12 12 12 12] の1通りである.

(2) $\frac{2\pi}{3}$ 回転に対して不変な図形は [1113 1113 1113] と [1122 1122 1122] の2通りである.

(3) π 回転に対して不変な図形は

[111114 111114], [111123 111123], [111213 111213], [112113 112113],
[121113 121113], [211113 211113], [111222 111222], [112122 112122],
[121122 121122]

の9通りである.

$|S_{18}| = 18!$, $|C_{18}| = 18$, $|S_{12} \times S_6| = 12!6!$ であるから, 回転非対称な図形の数 x として, 式(2-21)へ代入すると,

$$18! = \left(18x + \frac{18}{6} \times 1 + \frac{18}{3} \times 2 + \frac{18}{2} \times 9\right) \times 12!6! \quad (3-9)$$

となり, $x = 1026$ が得られる. したがって12角形の数 $は 1026 + 1 + 2 + 9 = 1038$. 答えは1038通りとなる. ■

4. コーシー・フロベニウスの定理

コーシー・フロベニウスの定理は, 以前バーンサイドの定理と呼ばれていたものである. インターネットでは容易に検索できるが^{6,7)}, 群論に関する書籍ではほとんど紹介されることがないので, この章でその定理を紹介し, 次章で応用例を示す.

群 G が集合 M 上に作用しているとし, $x \in M$ の G -軌道を $G(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$ とする. す

ると x の固定部分群は, $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ となる. 命題2-3により $|G|$ と $G(x)$, G_x の間には,

$$|G| = |G(x)| \cdot |G_x| \quad (4.1)$$

の関係がある.

次に $x, y \in M$ の同値関係 $x \sim y$ を $y \in G(x)$ で定義すると, M を同値類によって分割することができる. その完全代表系を $R = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ とし, n 個の元から成るものとする.

ここで $g \in G$ の不動点集合 M_g を

$$M_g = \{x \in M \mid g(x) = x\} \quad (4.2)$$

で定義すると, 同値類の数 n は $|G|$ と $|M_g|$ より次のように求めることができる.

【命題4-1】 集合 M を G -軌道により類別したときの同値類の数 n は

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M_g| \quad (4.3)$$

で与えられる (コーシー・フロベニウスの定理).

【証明】 $x \sim y$ ならば $|G_x| = |G_y|$ であることと, 関係式 (4.1) を用いる.

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |M_g| &= \sum_{x \in M} |G_x| = \sum_{x \in R} \sum_{y \in G(x)} |G_y| = \sum_{x \in R} |G(x)| \cdot |G_x| = \sum_{x \in R} |G| \\ &= n |G| \end{aligned} \quad (4.4)$$

よって, $n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M_g|$ という関係式が得られた. ■

5. コーシー・フロベニウスの定理の応用例

この章ではコーシー・フロベニウスの定理の応用例を紹介する.

5-1. 円周を9等分して3点を結び三角形をつくる

第1章と第3章 (第3-1節) で扱ったのと同じ問題であるが, コーシー・フロベニウスの定理を用いると, 以下のように解くことができる.

まず集合 M は三角形の頂点の選び方全体が成す集合である. 円周上を9等分しているので頂点の選び方は $\frac{9!}{3!6!}$ 通りである (図4参照). 集合 M 上に作用する群 G は, 円周を $\frac{2\pi}{9}$ 回転する並べかえ c_1 を生成元とする巡回群 $G = C_9 = \{e, c_1, c_1^2, c_1^3, c_1^4, c_1^5, c_1^6, c_1^7, c_1^8\}$ とする. $|G| = 9$ である.

次に G の元の不動点集合を調べる. e の不動点集合は集合 M のすべての元からなり, $\frac{9!}{3!6!}$ 個ある. 元 c_1^3 の不動点集合は, 円周を $\frac{2\pi}{3}$ 回転しても3点が変わらない点の選び方である. それは正三角形となるように, 点1と点4と点7を選んだとき, 点2と点5と点8を選んだとき, 点3と点6と点9を選んだときの3通りである. 元 c_1^6 についても同じである. 元 $c_1, c_1^2, c_1^4, c_1^5, c_1^7, c_1^8$ については回転不変に点を選べないので不動点集合は $\emptyset$ になる. 式 (4.3) に

代入すると,

$$\left(\frac{9!}{3!6!} + 3 + 3 + 0 \right) \div 9 = 10 \quad (5-1)$$

となり, 答えは10通りである. ■

5-2. 円周を6等分して4色の玉を並べる

最後に円周を6等分して4色の玉を並べる円順列の問題を考える. ただし, 各色の玉は6個以上あり, 隣り合う玉の色が同じでもかまわない.

この場合の集合 M は玉の置き方を元とし, 4^6 個ある. 集合 M 上に作用する群 G は, 円周を $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 回転する並べかえ c_1 を生成元とする巡回群 $G = C_6 = \{e, c_1, c_1^2, c_1^3, c_1^4, c_1^5\}$ であり, $|G| = 6$.

G の元 e の不動点集合は集合 M のすべての元からなり, $4^6 = 4096$ 個である.

c_1 の不動点集合の元はすべての玉の色が同じ場合であり, その数は4である.

c_1^2 の不動点集合の元は, $\frac{2\pi}{3}$ 回転で不変となるように, 点1と点3と点5, 点2と点4と点6の玉がそれぞれ同じ色であればよいので, $4^2 = 16$ である.

c_1^3 については, π 回転で不変となるように, 点1と点4, 点2と点5, 点3と点6の玉がそれぞれ同じ色であればよいので, $4^3 = 64$ である.

c_1^4 については c_1^2 の場合と同様に16になる.

c_1^5 については c_1 の場合と同様に4になる.

以上の結果を式(4-3)に代入すると $(4096 + 4 + 16 + 64 + 16 + 4) \div 6 = 700$ となり, 答えは700通りとなる.

また数珠順列の場合はさらに $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて,

$$G = \{e, c_1, c_1^2, c_1^3, c_1^4, c_1^5, \tau, c_1\tau, c_1^2\tau, c_1^3\tau, c_1^4\tau, c_1^5\tau\} \quad (5-2)$$

を集合 M 上に作用させる. $e, c_1, c_1^2, \dots, c_1^5$ については円順列の場合と同じである. 追加された6つの元の不動点集合を以下で調べる.

$\tau = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$ の不動点集合の元は, 点1と点6, 点2と点5, 点3と点4の玉がそれぞれ同じ色であればよいので, $4^3 = 64$ である.

$c_1\tau = (1)(4)(2\ 6)(3\ 5)$ の場合は, 点2と点6, 点3と点5の玉がそれぞれ同じ色であればよく, 点1と点4はどちらも何色でもよいので $4^4 = 256$ である.

$c_1^2\tau$ と $c_1^4\tau$ は τ と同様に64である.

$c_1^3\tau$ と $c_1^5\tau$ は $c_1\tau$ と同様に256である.

以上の結果を用いると $|G| = 12$ を用いて, $(4096 + 4 + 16 + 64 + 16 + 4 + 64 \times 3 + 256 \times 3) \div 12 = 430$ となり, 答えは430通りとなる. ■

参考文献

- 1) 雪江明彦, 『群論入門』, 日本評論社
- 2) 浅野啓三, 永尾汎, 『群論』, 岩波全書
- 3) 志賀浩二, 『群論への30講』, 朝倉書店
- 4) 飯高茂, 『群論, これはおもしろい』, 協立出版
- 5) 脇克志, 『群論入門』, 数学セミナー (2013) 7月号, P64 ~ P68, 日本評論社
- 6) <http://kyomura.web.fc2.com/math/enjyunretsu3.pdf>
- 7) http://www.nurs.or.jp/~lionfan/ironna_05.html

