

マクロパラサイト感染症の数理モデル —拡散結合系における感染症の流行 I—

豊 田 薫

生物個体群の拡散がマクロパラサイト感染症の流行に及ぼす影響について調べる。そのために、筆者がかつて提案した感染症の非線形力学モデルを拡散結合系に適用する。本稿では最初の試みとして特別な結合系を取り上げる。すなわち、同一の安定な周期的流行（安定リミットサイクル）が現れている同規模の孤立系を2つ用意し、寄主・パラサイト・FLIS（幼生の類）の夫々に対応する独立な3種類の拡散を持ち込み、拡散係数の値を変化させて流行解の移り変わりを追跡する。さてこのとき、3種類の拡散はみな同じ働きをするだろうか。また、拡散の強弱によって流行に変化は起きないだろうか。—観察によると、寄主の拡散とFLISの拡散においては一連の似通った流行解が現われる。他方、パラサイトの拡散の場合には様相の異なる解が現われる。また、拡散が比較的弱いときには多様なタイプの流行解がみられ、拡散が強くなると、拡散の種類によらず、同相に同期した安定な周期的流行が現われる。モデルを通して得られる知見は、現実の感染症の流行を理解しコントロールするための衛生学上の基礎情報となる可能性がある。

キーワード：マクロパラサイト、感染症の安定な流行、非線形力学系、拡散結合系、引き込み

1. はじめに

人類をはじめとする多くの生物にとって感染症は常に脅威であり続けてきた。その脅威に対抗すべく今日でも各種感染症の数理モデルが検討されている¹⁾。また、生態学的な感染症のモデルについてはアンダーソンとメイによるレビューが既に1979年の時点で存在している^{2, 3)}。彼らによれば、感染症はミクロパラサイトによるものとマクロパラサイト（例えば、蠕虫など）によるものに大別できる。このうちマクロパラサイト感染症について、かつて筆者は、アンダーソンらの到達点を踏まえつつ、新たな数理モデルを提案した^{4, 5, 6, 7)}。しかしそのモデルは、生物個体群の出入りが全くない孤立系を対象とするものであり、より現実に近いものには、なお改良の余地がある。そこで今回は、従来のモデルを拡散結合系へと拡張し、感染症に対する拡散の影響について調べることにする。

拡散的結合を考える前に、ここでまず孤立系に対する従前のモデルについて振り返る。モデルの特徴は2点に要約できる。すなわち、①寄主（宿主）とパラサイトのFLIS（free-living infective stage；幼生の類）の間に3次の非線形相互作用を導入したこと、さらに、②寄主集団にロジスティック成長をとりいれたことである。①の3次の非線形相互作用は、真の相互作用の形が未知であることから、伝染病の安定な周期的流行に対応する解を導き出すことを狙って、

アンダーソンらのモデルに含まれる2次の相互作用を改めたものである。また、②の寄主に対するロジスティック成長の仮定は、現実の寄主集団の成長が感染症以外の原因によっても必ず限界をもつにちがいない、という考えのもとにロトカとヴォルテラにならって環境収容力を導入したものである。その結果得られたモデル力学系は、自励系（自律系ともいう）ではあるが、それまで不可能だった安定な周期的流行解の発現を可能にするものとなった。

感染症の安定な流行に対応する解とは、非線形力学系に現れる安定な極限周期軌道SLC (stable limit cycle) のことである。また、こうしたリミットサイクルの出現は力学系の大域的分岐に関わっており、筆者が提案した上述のモデルにおいては、3つのタイプの分岐が存在することをこれまでに見出している。ここではその詳細は省くが、要点のみ簡単にまとめるならば、タイプIは不安定特異点のまわりにSLCが発生するいわゆる優臨界型ホップ分岐である。またタイプIIは、不安定特異点を囲む安定リミットサイクルの外側にさらに不安定リミットサイクルULC (unstable limit cycle) の共存を可能にする少し複雑な分岐である。タイプIIIは安定特異点の周りに不安定リミットサイクルのみが発生する分岐である（劣臨界）。

今後の目標は、局所系の構成要素（寄主・パラサイト・FLIS）の拡散によって結合する大きな系（拡散結合系）の中で、感染症（とりわけ安定な周期的流行）がどのように存在するかを調べることである。ところで、拡散的結合のもたらす効果については、よく知られた、チューリングによる線形力学系の不安定化の例がある。そのアイデアの要点は、セル（局所系）に含まれるモルフォゲン（化学物質）の拡散が力学系の特異点（平衡点）の不安定化をまねき、セルの間に非一様なパターンを導くというものである。だがこうしたアイデアも、非線形力学系に対してそのまま応用できるとは考えられない。一方、感染症の安定な流行に対応するSLCを仮に振動子とみるならば、SLCが存在する局所系同士の拡散的結合では引き込み（同調）が起こることが予想される。引き込みが起こると、振動子の間の位相が同期し振幅が変化することはよく知られている。しかしながら筆者のモデルに、果してどのような引き込みが起こるのか、それは調べてみなければわからない。またさらに、安定な周期的流行が起きている（安定リミットサイクルが存在する）局所系と起きていない局所系の拡散的結合は、どんな解をもたらすのだろうか、等々、予測がつかないことは余りにも多い。

2. 拡散結合系とマクロパラサイト感染症の数理モデル

2-1 感染症モデルの拡散結合系への拡張

まず拡散結合系のための方程式系を示す。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_i}{dt} = r\left(1 - \frac{N_i}{K_i}\right)N_i - \alpha P_i + D_N(N_{i+1} - 2N_i + N_{i-1}) \quad \dots\dots\dots(1_0) \\ \frac{dP_i}{dt} = \beta N_i W_i^2 - \mu P_i - \frac{\alpha}{x_i} \frac{P_i^2}{N_i} + D_P(P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}) \quad \dots\dots\dots(2_0) \\ \frac{dW_i}{dt} = \lambda P_i - cW_i - \beta N_i W_i^2 + D_W(W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}) \quad \dots\dots\dots(3_0) \end{array} \right.$$

式中、添字 i は局所系の番号に対応する整数であり、 $i = 1, 2, \dots, s$ とする。 s は局所系の個数である。(局所系に対して番号を振る場合、0から始めて $s-1$ までとする方が、取り扱いを容易にすることがある。)また局所系は寄主 N 、パラサイト P 、FLIS W を含む。各式の右辺の最後の項が、それぞれ拡散項であり、最近接ベクトルの (dN_i/dt が $N_{i\pm 1}$ にのみ結合していて、 $P_{i\pm 1}$ や $W_{i\pm 1}$ には結合していないことを指す) かつ線形であるとする。[上式 (1₀) ~ (3₀) は、拡散項を取り除いてやれば、かつて筆者が提案した孤立系に対するモデル力学系に帰着する。] D_N 、 D_P 、 D_W は N 、 P 、 W の拡散係数であり、これらの変化によって、解がどう変わるかを調べるのが今後のテーマである。一見する限りではモデルは単純である。しかし、こうしたベクトル場での拡散は直感的には捉えにくいものである点は前もって留意しておくべきである。

詳しい説明は省くが、ここで、孤立系を特徴づける他のパラメータについても簡単に触れておこう。 r は寄主 N の成長率、 K_i は寄主集団の環境収容力である。さらに α は寄主が寄生者によって殺される死亡率、 β はFLISと寄主との相互作用の強さを与える伝染係数である。 μ はパラサイトの死亡率、 x_i はパラサイトの反集中度—すなわち集中度(込み合い度)の逆—を示し、 $[0, 1]$ 区間でのみ値をとる。 $x_i=0$ は最も混み合いが強く、反対に $x_i=1$ は最も混み合いの少ない状況に対応する。 λ はパラサイト1個体によるFLISの有効生産率、 c はFLISの有効死亡率である。—この c の値が他のパラメータの値に比べて格段に大きいとき、解は急速に $dW/dt=0$ で与えられる準平衡曲面に落ち着くとする近似が成り立つ。これをアンダーソンらは“生物学的洞察”と呼び、 N と P の運動を調べるのに役立てた。物理学分野の言葉でならこれは断熱的な取り扱いといえよう。そして、こうしたパラメータの組み合わせと値の変化により、力学系に構造変化が起き、その結果が大域的な分岐を導くことは、前節で述べたとおりである。

次に、上記方程式系の取り扱いを容易にするため、変数変換とパラメータの置き換えを行なう。それによって、寄主集団の規模を表わす環境収容力 K_i は見かけ上消え去り、変数 N_i の初期値の範囲を制限できるようになる。

まず、時間 t に寄主の成長率 r を掛けて t' とする ($t'=rt$)。さらに変数を次のように小文字に書きかえる：

$$n_i = \frac{N_i}{K_i}, \quad p_i = \frac{\alpha P_i}{r K_i}, \quad w_i = \frac{\alpha W_i}{r K_i}$$

また同時に、パラメータに関しても

$$\beta_i' = \frac{\beta}{\alpha} K_i^2, \quad \mu' = \frac{\mu}{r}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{r}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{r}, \quad c' = \frac{c}{r},$$

$$D_j' = \frac{D_j}{r} (j = n, p, w), \quad k_{i,i\pm 1} \equiv \frac{K_{i\pm 1}}{K_i}$$

なる変換を行い、最後に全てのパラメータのプライムを取り除く。こうして次の方程式系が導かれる。左辺の変数の上のドット記号は時間 t' による時間微分を表わす。

$$\begin{cases} \dot{n}_i = (1-n_i)n_i - p_i + D_n(k_{i+1}n_{i+1} - 2n_i + k_{i-1}n_{i-1}) & \dots\dots\dots(1) \\ \dot{p}_i = \beta_i n_i w_i^2 - \mu p_i - \frac{p_i^2}{x_i n_i} + D_p(k_{i+1}p_{i+1} - 2p_i + k_{i-1}p_{i-1}) & \dots\dots\dots(2) \\ \dot{w}_i = \lambda p_i - c w_i - \beta_i n_i w_i^2 + D_w(k_{i+1}w_{i+1} - 2w_i + k_{i-1}w_{i-1}) & \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

これで環境収容力 K_i は表面上見えなくなった。しかし K_i は、上で示したように、変数 n_i , p_i , w_i には逆数の形で含まれ、 n_i , w_i 間の相互作用の強さ β_i には2乗の形で含まれている。また、拡散項に現れる係数 $k_{i\pm 1}$ は、隣接局所系の環境収容力の比によって与えられている。

ここで試みに、上式を使って、拡散の無い($D_n = D_p = D_w = 0$)孤立系の3次元軌道を描いてみよう。図1は前述したタイプI分岐によって、安定

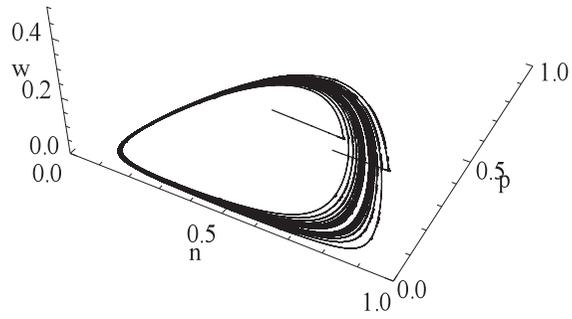


図1 孤立系における3次元軌道の例(タイプI分岐によってSLCが発現する場合)。2つの状態点は過渡期にすばやく準平衡曲面に移動している(軌道の直線的に見える部分)。その後、安定極限軌道SLCへと巻きついて行く。ただしSLCそのものは描かれていない。

極限軌道SLCが現われる状況を示している(パラメータの値は次章で示す)。図の2本の軌道が巻きつく先に、(感染症の安定な流行に対応する)SLCが存在している。従って長時間後の軌道のみ部分的に切り出すならば、SLCの概形が得られる。

一般に、多数の局所系からなる拡散結合系を対象とする場合には、周期境界条件を仮定することにより、取り扱いを容易にできることが多い。筆者もこの方法を用いる。また、最初はもっとも小さな結合系として、2つの局所系から成るケースを扱う。すると、例えば n_i に対する周期境界条件は、 $n_0 = n_2$, $n_3 = n_1$ と表される。その結果、式(1)の拡散項は、 $i=1$ の場合、 $2D_n(k_{12}n_2 - n_1)$ と変形される。 p_i と w_i についても同様である。また $i=2$ なら、添字1と2を入れかえる。さらに、 k_{ij} の定義により、 $k_{21} = k_{12}^{-1}$ が成り立つ。

2-2 結合系の表わし方

他の系との間に生物の出入りがまったくない系をこれまで孤立系といった。また孤立系を拡散的に結合するとき、結合された個々の系を局所系と呼んだ。ところで、結合系の状態を表わすには、結合前の孤立系の規模と状態、さらに結合の状況を明示する必要がある。そこで考えられるのが、ふさわしいパラメータの値を並べて示すことである。まず孤立系の規模と状態を表すパラメータには、環境収容力 K_i とパラサイトの反集中度 x_i がある。しかし前述のように、 K_i は方程式系の前面から姿を消している。そのため K_i の代わりに β_i を用い、 β_i と x_i とで系を表

すことにする。というのも、 β_i は伝染病の種類に依存する β/α と環境収容力 K_i の2乗の積で与えられるが、議論の前提として伝染係数 β や寄主の死亡率 α は一定値とみて変化させないため、実質上、 K_i^2 と同等と見なすことができるからである。その他のパラメータ λ , μ , c についても、 α や β と同様に伝染病に固有の値とみなされ、議論を通して一定値であると考えることができる。

これらをふまえ、まず孤立系を表すための表記法を導入する。連結されていない1個の孤立系を表現するために、 β_1 と x_1 とをカンマで区切って並べ、“[]”で囲む： $[\beta_1, x_1]$ 。さらに相互に繋がりのない独立した2つの孤立系の組を表すには、 β_i と x_i の組をセミコロンで区切って並べ、“[]”で囲む： $[\beta_1, x_1; \beta_2, x_2]$ 。添字1, 2は孤立系につけた番号である。

次に、2つの局所系からなる拡散結合系のための表記法を導入する。拡散の状況は拡散係数 D_n , D_p , D_w の値を順に並べて表示するのが適当と考えられる。そこで、2つの系の間には拡散的な結合がある系では、まず β_i と x_i を孤立系の番号の順に並べてのち区切り記号“|”を置き、その右に拡散係数を順に並べて、全体を“【】”で囲むものとする： $[\beta_1, x_1; \beta_2, x_2 | D_n, D_p, D_w]$ 。この後、添字1, 2は局所系の番号と見なされる。よって拡散係数が全て零： $D_j=0$ ($j=n, p, w$) の場合であれば $[\beta_1, x_1; \beta_2, x_2 | 0, 0, 0]$ と表されるが、これは孤立系の組、 $[\beta_1, x_1; \beta_2, x_2]$ と同等である。また今後、表記 $[\beta_1, x_1; \beta_2, x_2 | D_n, D_p, D_w]$ を使う際、孤立系の情報が変わらないことが暗黙に理解できる場合には、“|”より左の孤立系を表す文字列を、シンボル“*”で置き換えた $[\ast | D_n, D_p, D_w]$ を省略表記として使用する。

次章からは拡散係数 D_j ($j=n, p, w$) をパラメータとして変化させ、感染症の流行への拡散の影響について調べる。しかしながら、多変数からなる非線形方程式系の場合、解を解析的に見つけるのはもちろん、特異点を求めることさえ一般に困難である。それゆえ差当り筆者は計算機を使って数値解を求め、解の挙動を観察して行く。

3. タイプ I 分岐に由来するSLC同士の拡散的結合

従来の(孤立系を対象にした)3次元モデル力学系において、タイプ I 分岐によって安定極限軌道SLCが現われるのは、例えば、パラメータの組が、 $\beta = 51200$ ($K=200$), $\lambda=10$, $\mu=8$, $c=16$ であり、かつパラサイトの反集中度 x の値が $0.76622 \dots \leq x \leq 0.78497 \dots$ の範囲に存在しているときである。

われわれのねらいは、感染症の流行への拡散の効果を調べることである。そのため今後は、反集中度 x の値が、SLCが現われる上記範囲の内部あるいはあまり離れていない外部に値をもつ、2つの孤立系を選び出し、それらを拡散によって結合する。

本稿ではまず、2つの孤立系にまったく同じSLCが存在する場合を取り上げる。そのため、 $x=0.78$ ととる。(この値はSLCが現れる上記範囲の右端近くにあり、孤立系にはかなり大規模なSLCが出現する状況にある。) 極端ともいえるこの特別なケースを調べる理由は、以降で取り上げる予定の、様々な結合系に対する判断材料になる可能性があるからである。

ところで拡散結合系の初期値は6次元ベクトル $(n_1^0, p_1^0, w_1^0, n_2^0, p_2^0, w_2^0)$ として与えられる。しかしこれは2つの3次元局所系にそれぞれ初期値 (n_1^0, p_1^0, w_1^0) および (n_2^0, p_2^0, w_2^0) を設定

しているのと同じことである。それと同様に、軌道を追跡する場合にも、6次元空間の軌道をそのまま把握することは困難であり、今後は適宜、3次元局所系もしくは2次元空間（平面）の中に軌道を映して観察する。

3-1 【51200,0.78 ; 51200,0.78 | 0,0,0】：拡散的結合が無い系

最初に系の中に結合がない場合、すなわち同じ孤立系が2つ存在する場合をとりあげる。今後は断らない限り、初期値を長時間後の軌道がSLC（存在するならば）に収斂するように選ぶ。（つまり安定特異点へ収束するような軌道は問題にしない。）計算は目的に応じて20000～100000時間を目途に行い、得られる解の挙動を観察する。（時間の単位はパラメータの値によって決まる。そのため特に問題にしない。）

まず一例として初期値を（0.9,0.08,0.2,0.35,0.1,0.15）に選んで軌道を求める。図2aに n_1p_1 空間に射影された軌道を描く。ただし最初の過渡的な部分は取り除き、最後の100時間のみを切り出している。また図2bには n_2p_2 空間での軌道を描く。図で見ると両平面には全く同じSLCが1つずつ現れている。同じSLCが現れるのは、同じ状態の孤立系の中に繋がりが無いからである。図2cには n_1n_2 空間に射影された軌道を描く。仮に状態点と同じ形をしたSLC上を動き、しかも位相が一致しているならば、点 (n_1, n_2) は直線 $n_2=n_1$ 上を往復するはずである。したがって図2cに描かれている軌道からは、 n_1 と n_2 には位相のずれが存在していると推測できる。（今後は、特に断らなければ、位相の差は n_1 と n_2 について調べるものとし、単に“解の位相差”と言う場合があることを断っておく。）この位相の差は、局所系における初期値の違いが原因である。また前掲の初期値を、（0.35,0.1,0.15,0.9,0.08,0.2）のように、前後で半分ずつ入れかえて軌道を求めると、図2cの軌道を、直線 $n_2=n_1$ を軸にして対称に映した軌道が得られる。つまり、2つの孤立系には対称性が保たれている。このように、SLCがまったく同じであるにもかかわらず、初期値が異なると n_1n_2 平面や p_1p_2 平面に現れる軌道が異なって見える点は注意を要する。

図2dと図2eには n_1, n_2 の時系列を $t=0\sim 100$ と $t=19900\sim 20000$ の、100時間ずつとって描いた。図中、濃い線は n_1 に、薄い線は n_2 に対応する。図2eは、十分時間が経つと解 n_1 と n_2 の振幅が一致していることを示している。これはまったく同一の条件下にある2つの局所系に、同じSLCが現れることに対応している。また解の位相差は、長時間後には一定になって残っている。

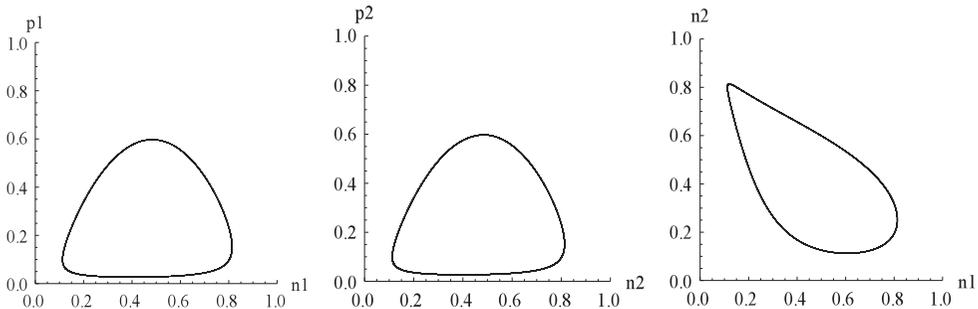


図2a $D_j=0$ ($j=n,p,w$)

n_1p_1 空間の軌道

図2b n_2p_2 空間での軌道

図2c n_1n_2 空間の軌道

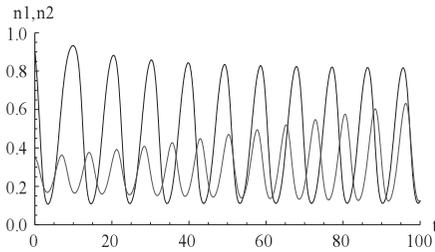


図2d $D_n=0$ n_1, n_2 の初期の時系列
濃い線は n_1 , 薄い線は n_2

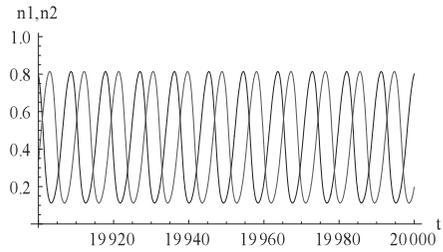


図2e n_1, n_2 の長時間後の時系列
濃い線は n_1 , 薄い線は n_2

解の位相差の変化をより詳しく見るために、一方の振動 (n_1) の極大値の間隔を1周期 (2π とする) として基準にとり、他方 (n_2) の極大値の、基準からのずれ $\Delta \theta_i$ を拾い出し、点 $(\Delta \theta_i, \Delta \theta_{i+1})$ を順にプロットした、いわゆる位相リターンマップが図2fである (ここでは各点を時間の順に線で繋いでいる)。図の縦、横軸の単位は π である。これによっても位相差がほぼ一定値 (約 0.761π) に収束していく様子が確かめられる。また、長時間後に残る位相の差が初期値に依存することは、初期値を取り替えてみることにより容易に確かめることができる。

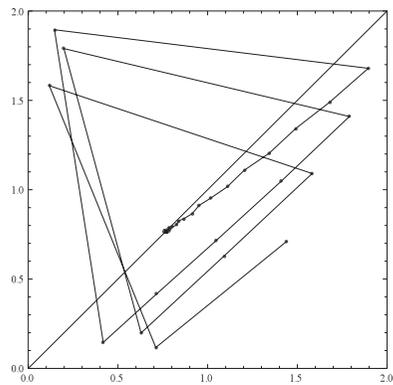


図2f 位相r.map (リターンマップ)。軸目盛の単位は π 。点を線で繋いでいる。

3-2 [51200,0.78 ; 51200,0.78 | $D_n, 0,0$] : 宿主にのみ拡散がある場合

これより孤立系の組 [51200,0.78 ; 51200,0.78] に拡散的な結合をもち込む。まず宿主 n の間にだけ拡散が起こる場合を想定する。現実の生態系において、パラサイト p 及び FLIS w には拡散が存在せず、宿主 n にだけ拡散が起こるといった状況は容易にはありえないかもしれない。しかし計算機実験ではこうしたことも可能である。ここからは、 D_n の値だけを変化させて、少し詳しく解の挙動を観察する。

3-2-1 [51200,0.78 ; 51200,0.78 | 0.0001,0,0]

弱い結合を仮定して拡散係数を $D_n=0.0001$ とすることから始める。拡散の効果が小さいため、解は結合のない場合と比べて、大きく変化することはないものと予想される。初期値を (0.9,0.08,0.2,0.35,0.1,0.15) に選び、軌道を図3a, b, c に示す。2つの局所系にまったく同じ SLC が現れ、結合のない場合ともあまり差がない。図3aでは、第1, 第2局所系の np 平面を重ねて描いてみた。2つの SLC は完全に重なっている。また図3b, c の軌道はいずれも原点を通る傾き45度の直線に対して対称的であり、位相差がほぼ π であることを推測させる。また初期値を替えても同じ軌道が得られることを確かめることができる (詳細略)。

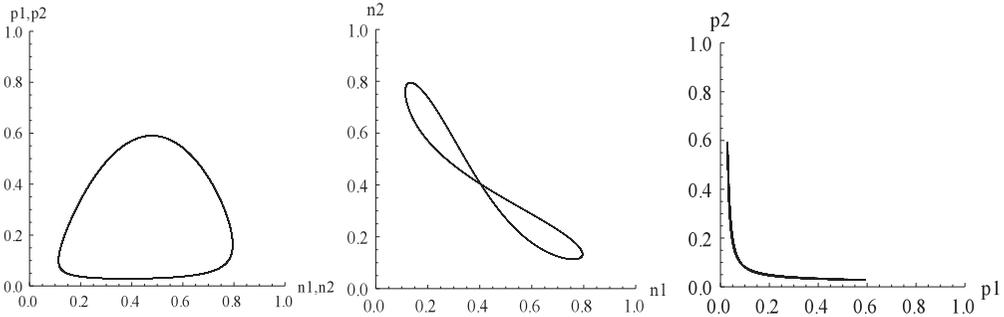


図3a $D_n=0.0001$ n_1p_1 と n_2p_2 空間の軌道(重ねて描いている。)

図3b n_2p_2 空間での軌道

図3c p_1p_2 空間の軌道

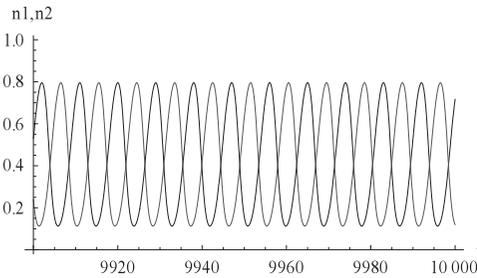


図3d $D_n=0.0001$ n_1, n_2 の長時間後の時系列
濃い線は n_1 ,薄い線は n_2

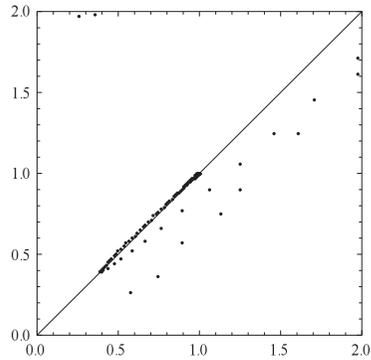


図3e $D_n=0.0001$ 位相r.map

長時間後に、状態点がほとんどSLC上にある状況での n_1, n_2 の時系列を図3dに示す。濃い線(薄い線)は解 n_1 (解 n_2)である。解の間に逆同期(位相差 π)が起きている。

このことが、 n_1n_2 空間や p_1p_2 空間に対称な軌道が現れた理由であると考えられる。図3eは位相リターンマップである。位相差は最後に π に収斂している。

図3fには局所系の罹患率(有病率) $R_i = p_i/n_i$ ($i=1,2$)の長時間後の時系列を示す。罹患率はほぼ0.1~1.7で増減を繰り返し、逆相に同期している。またこうした結果は初期値にはよらない。— 真の罹患率は $P_i/N_i = rR_i/\alpha$ で与えられ、定数倍 r/α だけ違いがある。

つまり $D_n=0.0001$ のとき、引き込みにより第1, 第2局所系のSLCは逆相に同期することが明らかになった。

この後、 D_n の値を大きくしていくと np 平面の軌道は多少変形するが、その他にはあまり大き

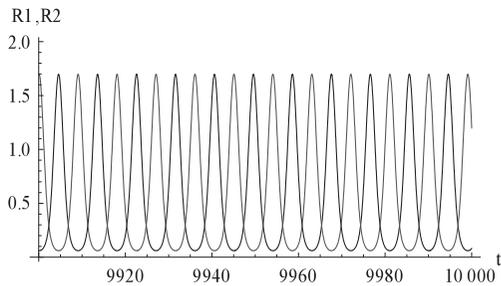


図3f $D_n=0.0001$ 罹患率の時系列(長時間後)
濃い線は R_1 ,薄い線は R_2

な変化はみられない。またこうした状況は概ね $D_n \approx 0.0019$ までつづき、この間、軌道に大きな質的变化はみられない。

3-2-2 【51200,0.78 ; 51200,0.78 | 0.00194,0,0】 ~ 【51200,0.78 ; 51200,0.78 | 0.0076 ,0,0】

ところが $D_n \approx 0.00193$ のあたりで、 np 平面のSLCは縮小し、軌道の線にわずかな幅が現れる。これは僅かにずれた曲線が何本も描かれているからであり、解がSLCから準周期解に変わったためと考えられる。

【* | 0.00194,0,0】

$D_n = 0.00194$ のときの軌道を図4a,bに示す。軌道の広がりが増して細い“帯”のように見える。しかし時系列への影響は殆ど認められない。そのため時系列図は描かない。また時系列では捉えにくいですが、位相リターンマップからは、位相の差が π の前後で増減を繰り返すのが見てとれる(図4c)。ただし、この変動は初期値によって多少の差がある(詳細略)。

さらに D_n の値を大きくすると、軌道の“帯”の幅は広がる。それに伴い長時間後には、振動解の振幅に僅かな変動が現われる。しかし定性的には特別な変化はみられない。

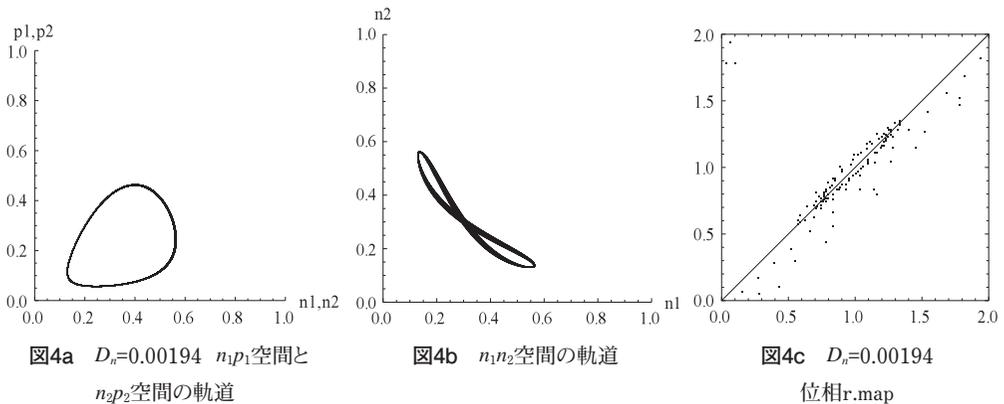


図4a $D_n=0.00194$ n_1p_1 空間と n_2p_2 空間の軌道

図4b n_1n_2 空間の軌道

図4c $D_n=0.00194$ 位相r.map

【* | 0.0026,0,0】

$D_n = 0.0026$ とし、初期値を(0.6,0.18,0.3,0.5,0.12,0.2)ととる。長時間後($t = 39800 \sim 40000$)に np 平面の軌道が描く“帯”の幅はさらに広がる(図5a, b)。— 軌道が収束しているこうした帯状の領域のことを、とりあえず“アトラクタ”と呼ぶことにする。この幅の変動を詳しく見るために、図5cに n_1 の振幅リターンマップを描く。すなわちこの図では、 n_1 の時系列から極大値を選び出してこれを n_{1j} とし、点(n_{1j}, n_{1j+1})を順にプロットしている。ただしここでは、初めの過渡的部分を取り除き、長時間後だけを切り出している。図には、振幅の増減が周期的に繰り返されていることに加えて、振幅が減少するとき、 $n_1=0.56$ の近くで少し長く留まる様子が捉えられている。これが図5a, bのアトラクタの帯に、濃い縞模様となって現れている。またこれに対応して長時間後($t = 39500 \sim 40000$)の n_1 の時系列(図5d)と有病率 R_1 の時系列(図

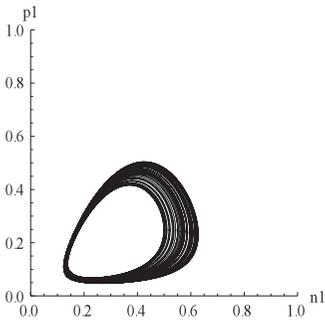


図5a $D_n=0.0026$
長時間後の n_1p_1 空間の軌道

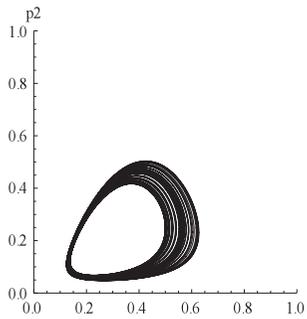


図5b $D_n=0.0026$
 n_2p_2 空間の軌道

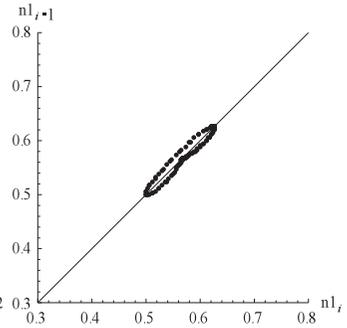


図5c $D_n=0.0026$
 n_1 の振幅r-map

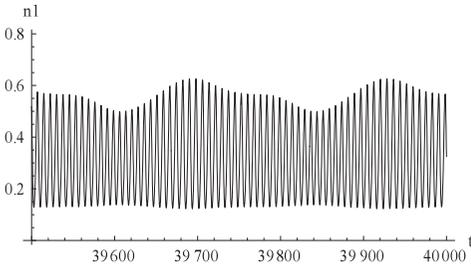


図5d $D_n=0.0026$ n_1 の時系列(長時間後)
 n_1 の時系列

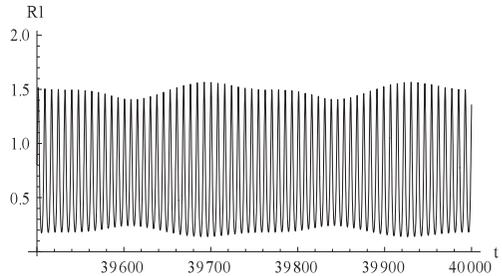


図5e $D_n=0.0026$ R_1 の時系列(長時間後)

5c) には、規則的な周期的振動に加えて、長周期の振幅の変動が現れている。

図5fは位相リターンマップである。 n_1 と n_2 の位相差にも長周期の変動 ($0.5\pi \sim 1.5\pi$) がみとめられる。また初期値を取り替えて計算すると、この位相差の周期性は、初期値によって若干異なることが確かめられる。

徐々に D_n の値を大きくしていくと、 n や p の振幅は時間的に大きく変動し、 np 平面のアトラクタの“帯”はさらに広がりを増す。解の位相差も周期的に大幅な変動をみせる。

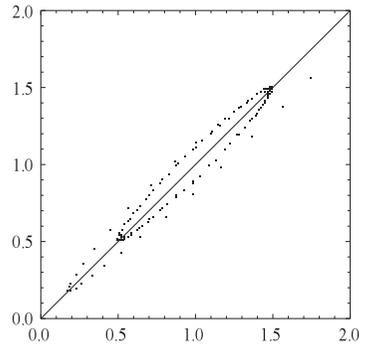


図5f $D_n=0.0026$ 位相r.map

【* : 0.0035, 0.0】

$D_n=0.0035$ とし、初期値を $(0.6, 0.18, 0.3, 0.5, 0.12, 0.2)$ にとる。 n_1p_1 , n_2p_2 平面におけるアトラクタの“帯”は広がり、その中には濃い縞模様が存在して、さらに複雑さを増している (図6a, b)。

この状況を詳しくみるために、 n_1 の時系列 (図6c) とともに振幅リターンマップを描く (図6d)。複雑に見える振る舞いの中に、振幅が長周期で増減を繰り返すことに加えて、減少の途中で一度増加に転じ、そののち再び減少するという規則性を読み取ることができる。

しかもこうした振る舞いは2つの局所系にほぼ共通することを確かめることができる(詳細略)。罹患率の時系列にも同様の構造が現れる。解の位相差は、初期値のとり方によって周期的に変動するものもあれば周期性の認められないものもあり、初期値依存性がある。

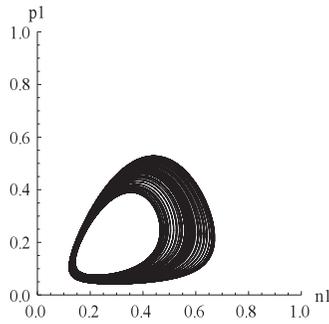


図6a $D_n=0.0035$
 n_1p_1 空間の軌道

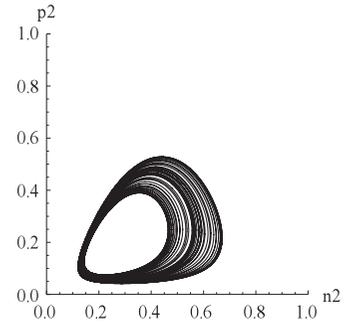


図6b n_2p_2 空間の軌道

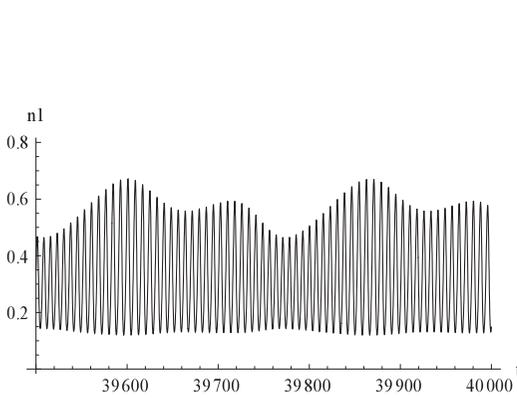


図6c $D_n=0.0035$ n_1, n_2 の長時間後の時系列

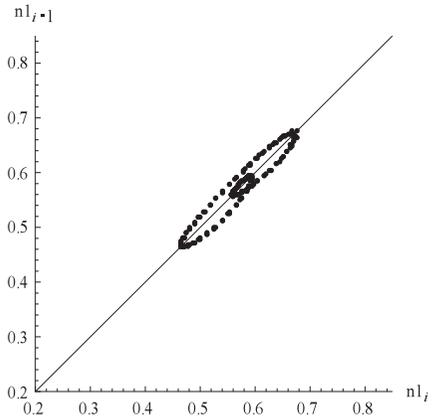


図6d $D_n=0.0035$ 振幅r-map

[* : 0.005,0,0]

D_n の値をさらに大きくすると、アトラクタの“帯”の幅はますます広がる。 $D_n=0.005$ とし、初期値に(0.6,0.18,0.3,0.5,0.12,0.2)を選んで解の様子をみる。 n_1 の時系列のみ、時間間隔を長く取っ

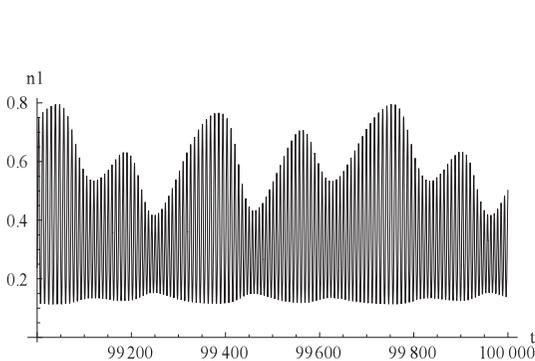


図7a $D_n=0.005$ 長時間後の n_1 の時系列

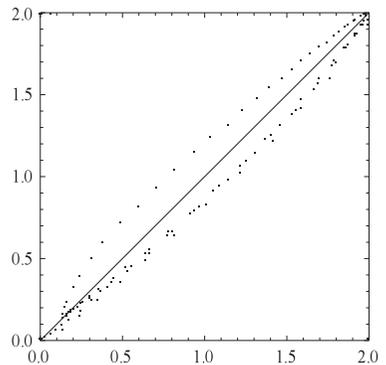


図7b $D_n=0.005$ 位相r.map

て示す (図7a)。振幅の変動は複雑さを増すがほぼ周期的にみえる。そこで、極大値の間隔 (振動の1周期) を基準にして振幅の変動の周期を見積もると約45倍である。 n_2 についても同様であるがそれは省く。また振動解 n_1 と n_2 の位相差も大幅な変動を繰り返す (図7b)。だがこれには初期値依存性があり、周期性をほとんど認めることのできない解もある (詳細略)。

【* | 0.0055, 0, 0】

D_n の値をわずかに大きくとり $D_n = 0.0055$ とすると、長時間後の時系列 (図8) はやや単純な波形に変化する。この変化は両方の局所系で起こり、系間で大きな差はみられない。罹患率の時系列についても状況は同じであるがこれを図示するのは割愛する。

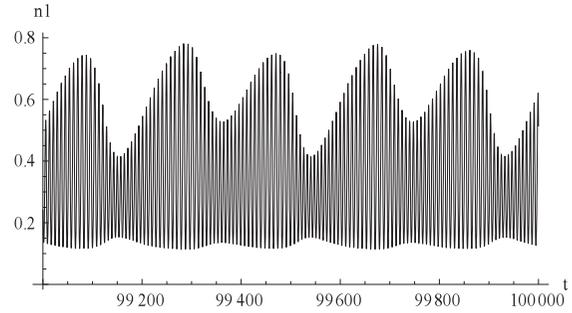


図8 $D_n=0.0055$ 長時間後の n_1 の時系列

【* | 0.006, 0, 0】

初期値を (0.6, 0.18, 0.3, 0.5, 0.12, 0.2) にとり、 $D_n = 0.006$ とする。このとき、2つの局所系のアトラクタの規模には差が現れる。(図9a, b)。また同時に位相リターマップ (図9c) は、 n_1, n_2

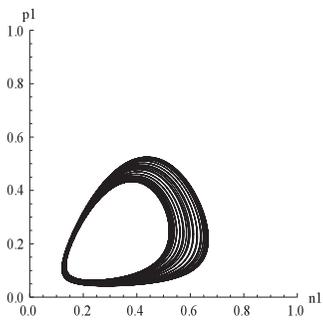


図9a $D_n=0.006$
 $n_1 p_1$ 空間の軌道

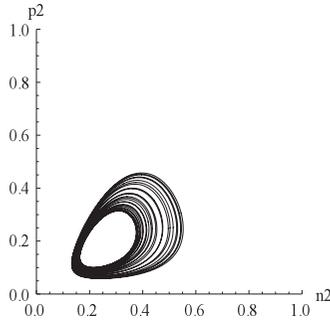


図9b $n_2 p_2$ 空間の軌道

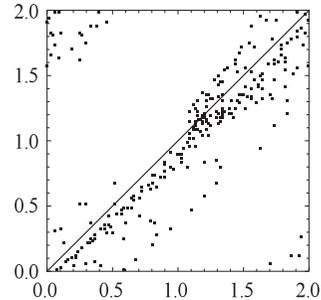


図9c $D_n=0.006$
位相r.map

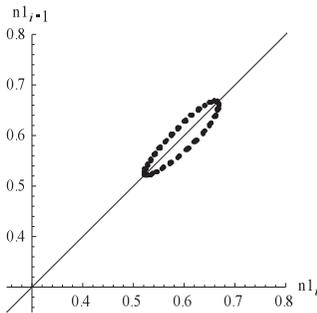


図9d $D_n=0.006$ n_1 の振幅r.map

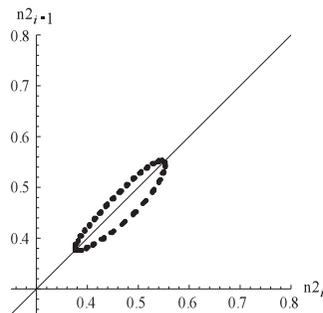


図9e n_2 の振幅r.map

の位相差が殆んどランダムに変動していることを示す。さらに帯状部分の詳細を見るために長時間後の振幅リターンマップ (図9d, e) を描くと、比較的単純な構造をもつことがわかる。

時系列は n_2 に対してのみ示す (図9f)。これを見ると、振幅の変動の周期が振動の周期の約16倍になっていることがわかる。

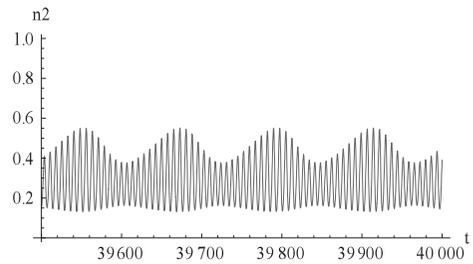


図9f $D_n=0.006$ 長時間後の n_2 の時系列

さらに D_n の値を大きくすると、2つの局所系のアトラクタがさらに縮小するのが観察される。しかし周回軌道が作る“帯”の幅は容易には小さくならず、維持される。

【* 0.0076,0,0】

$D_n=0.0076$ ととり、初期値を先ほどと同じ値を選んで軌道を1本求める。すると2つの局所系のアトラクタの規模に極端な差が現れる (図10a, b)。また、第1局所系のアトラクタの“帯”の幅は狭い。一方、第2系のアトラクタは、サイズは小さいものの、“帯”の幅は広く、振動解の振幅の変動が大きいことを示している。

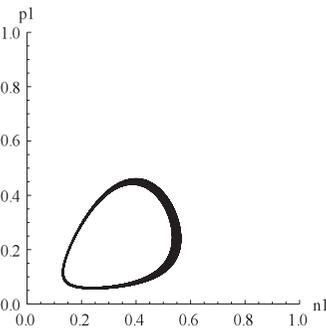


図10a $D_n=0.0076$
 n_1p_1 空間の軌道

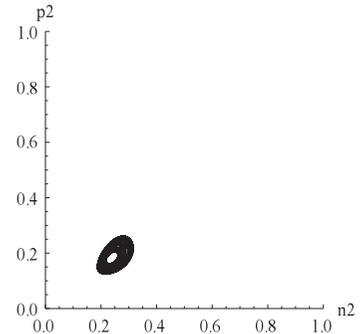


図10b n_2p_2 空間の軌道

このように、異なる局所系に規模の異なるアトラクタが現れるが、これはまた、1つの局所系に異なる2種類のアトラクタの存在が可能であることを示している。そしてどちらが実現するかは初期値によって決まる。図10cでは初期値の異なる軌道を2本求め、現れた2つの異なるアトラクタを同じ n_1p_1 平面に重ねて描いている。

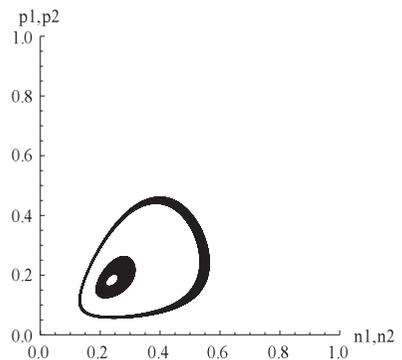


図10c $D_n=0.0076$ n_1p_1 空間の軌道。
2つの異なるアトラクタを描く。初期値によって何れかが選ばれる。

また2つのアトラクタが存在することは、6次元空間の中に夫々のアトラクタの吸引圏 (吸引の鉢) が存在することを暗示している。これを見出すことは感染症の流行を予測し管理するには重要である。だが、吸引圏の全体を明らかにすることは困難である。

時系列でみると、どの系の解も振幅の変動の周期が短くなることが観察される（図10d；但し n_2 のみ示す）。しかし解 n_1 と n_2 の位相差の変動には特別な規則性は認められない（図10e）。

図10f, gに罹患率の時系列を示す。局所系によって大きな差が生じることがわかる。

繰り返すが、こうした結果は、初期値の選び方によって、同じ局所系の中に規模の異なる大きな変動を伴う流行が起こりうることを示唆するものであり、興味深い。

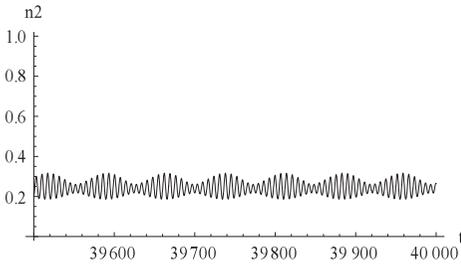


図10d $D_i=0.0076$ n_2 の時系列

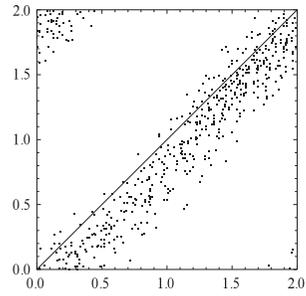


図10e $D_i=0.0076$ 位相r.map

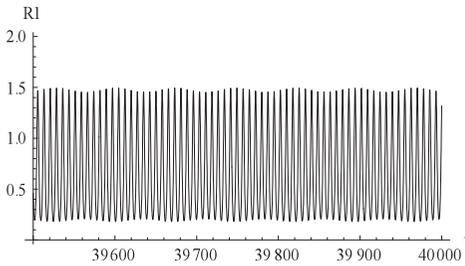


図10f $D_i=0.0076$ 罹患率 R_1 の時系列

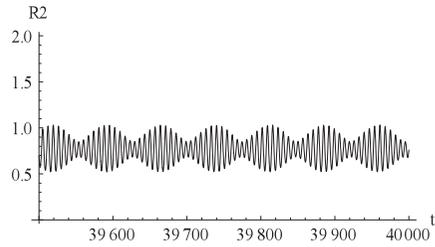


図10g $D_i=0.0076$ 罹患率 R_2 の時系列

3-2-3 $[51200, 0.78 ; 51200, 0.78 ; 0.008, 0, 0] \sim [51200, 0.78 ; 51200, 0.78 ; 0.3, 0, 0]$
 $[* ; 0.008, 0, 0]$

$D_i=0.008$ ととる。6次元空間中の1本の軌道は、2つの局所系に大きさの異なるSLCとなって現われる。（図11a, b）。しかも第2系のSLCは不安定特異点の周りの極めて小さな周期運動

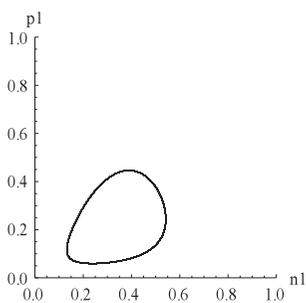


図11a $D_i=0.008$
 n_1p_1 空間の軌道

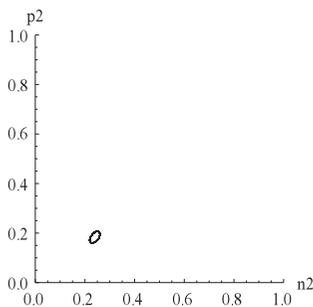


図11b n_2p_2 空間の軌道

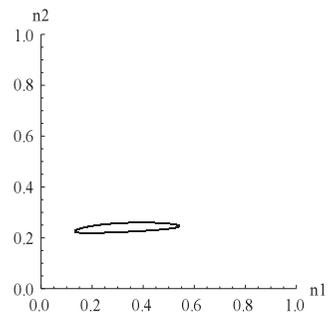


図11c n_1n_2 空間の軌道

となり、あたかも罹患率が変化しない風土病解のようにみえる。 n_1n_2 空間における軌道も単純な閉曲線になる (図11c)。これに応じて n や p の時系列も単純になり、罹患率 R に反映する。また振幅に長周期の変動はみられなくなる (図は省略)。ただし、 n_1 と n_2 の位相差は不規則に変化する (図11d)。

初期値をこれまでと同じ値にとり、 D_n の値を徐々に大きくしながら観察を続けると ($0.008 < D_n < 0.023$)、第1局所系のSLCは縮み、反対に第2系のSLCは広がるのがみられる。ところが D_n が0.023を超えた辺りから、縮小をつづけていた第1系のSLCは再び大きくなり始める。それと同時に、両系の解の位相差も一定値に収束する傾向がみられるようになる。

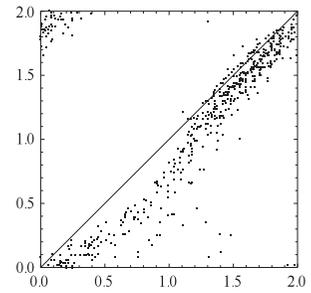


図11d $D_n = 0.008$
位相r.map

【* | 0.05 ,0,0】

$D_n = 0.05$ とする。初期値を (0.6,0.18,0.3,0.5,0.12,0.2) と (0.3,0.1,0.25,0.89,0.08,0.2) に選んで軌道を2本描き、順に第1、第2軌道と呼ぼう (図12a, b, c)。各図の濃い線 (薄い線) が第1軌道 (第2軌道) である。濃い第1軌道は、第1局所系には小さなSLCとなって、また第2

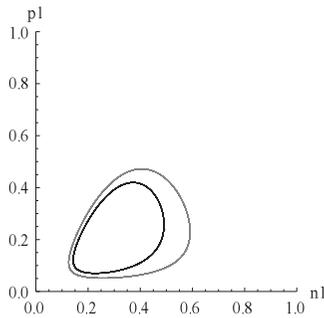


図12a $D_n = 0.05$
 n_1p_1 空間の軌道

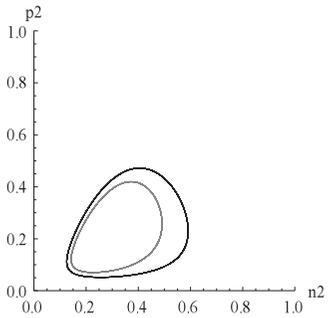


図12b n_2p_2 空間の軌道

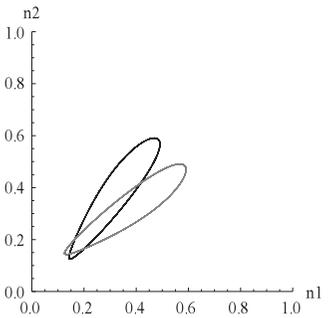


図12c n_1n_2 空間の軌道

局所系には大きなSLCとなって現れている。さらに薄い第2軌道の場合には、大小の現われ方が逆になっている。しかし、第1、第2局所系の大きいSLC同士、あるいは小さいSLC同士は夫々まったく同じ大きさである。

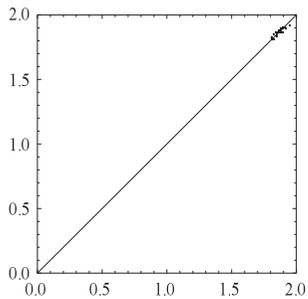


図12d $D_n = 0.05$ 第1軌道の
位相r.map。収束値 -0.13π 。

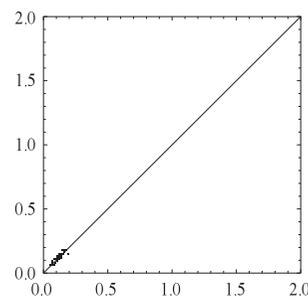


図12e $D_n = 0.05$ 第2軌道の
位相r.map。収束値 0.13π 。

また図12cで見ると、何れの軌道の場合にも、(扁平な)閉軌道は傾き45度の直線にかなり近づいてきており、 n_1 と n_2 の位相が揃いかけていることをうかがわせる。しかも図に見られる2つの閉軌道の対称性は、位相差についての規則性の存在を暗示している。

そこで、各軌道について、位相リターンマップを描くと(図12d, e)、位相差はそれぞれ一定値に収束していることがわかる。収束値は、第1軌道の場合がほぼ 1.87π (-0.13π)、第2軌道の場合は 0.13π である。つまり、SLC解の位相差は $\pm 0.13\pi$ であることが明らかになった。符号が正、負の何れになるかは、初期値しだいである。

図12fには、罹患率 R_1 と R_2 の長時間後の時系列を示す。たしかに両者の間にはそれほど大きい位相の差はない。

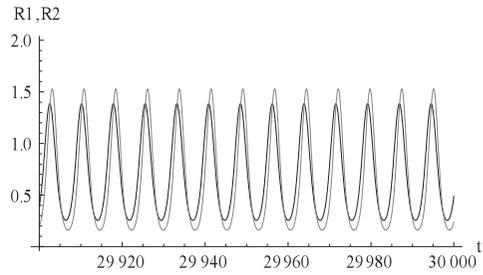


図12f $D_n=0.05$ R_1, R_2 の時系列(第1軌道、長時間後)。濃い線が R_1 、薄い線が R_2 。

さらに D_n を大きくしていくと、2つの局所系の異なるSLCの規模に差はみられなくなる。それと同時に n_1 、 n_2 の位相の一致も進む。しかもこのとき、上で見た、解の位相差が $\pm \phi$ となる規則性は保たれる。そして D_n の増加とともに $\phi \rightarrow 0$ の形で位相は一致して行く。

【* | 0.3, 0, 0】

途中を省略して D_n の値を0.3にすると、第1、第2局所系の軌道は完全に一致する。また、位相も完全に揃い、初期値依存性も無くなる。図13aではSLCが一致することを示すために $n_1 p_1$ 空間と $n_2 p_2$ 空間を重ねて描いている。また、図13bの $n_1 n_2$ 空間の軌道は線分となっている。これは振動解が同相に同期していることを意味する。 $p_1 p_2$ 空間の軌道図でも同様のことがみられる(図13c)。

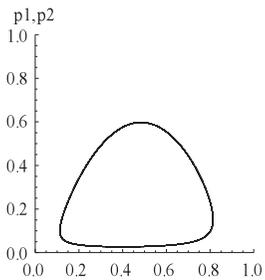


図13a $D_n=0.3$
 np 空間の軌道

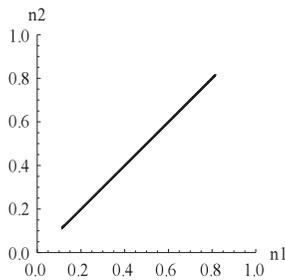


図13b $n_1 n_2$ 空間の軌道

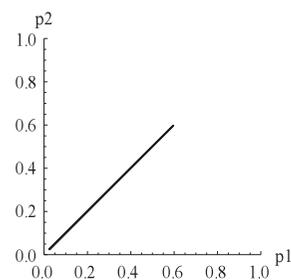


図13c $p_1 p_2$ 空間の軌道

また図13dの位相リターンマップで見ると点がまったく描かれていないように見える。原点または点 $(2\pi, 2\pi)$ 上に打点されているからである。図13eには罹患率 R の時系列を描いている。充分時間が経過した後は、 R_2 (薄い線)が R_1 (濃い線)に完全に重なっている。

このように拡散が大きいとき両方のSLCに強い引き込みが起こり、位相差のない安定な流行

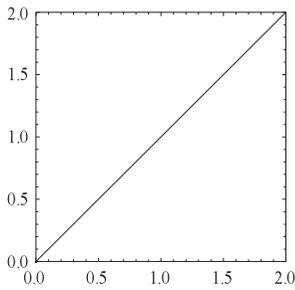


図13d $D_n=0.3$ 位相r.map
点は殆ど見えていない。(0,0)または $(2\pi, 2\pi)$
に打点されている。

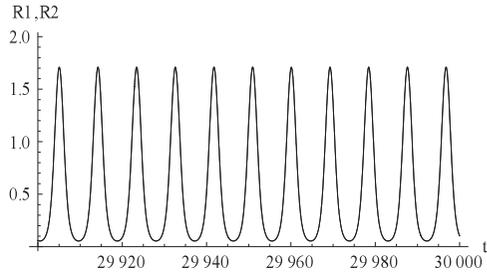


図13e R_1, R_2 の時系列(長時間後)。 R_1 と R_2 が完全に
重なっている。

が発現することが明らかになった。

この後、 D_n の値を10倍にしてもこの状況は変わらない。強い引き込みが起こり、両方の局所系には同相に同期した安定な流行が存在する。

以上、 D_n のみを変化させて解の変容を概観した。次は D_p についてみて行こう。

3-3 【51200,0.78 ; 51200,0.78 ; 0, $D_p, 0$ 】：パラサイトにのみ拡散がある場合

3-3-1 【51200,0.78 ; 51200,0.78 ; 0,0.0002,0】

拡散係数 D_p を徐々に大きくしていく。まず $0 < D_p < 0.00001$ のとき、拡散の影響はほとんど現れない。すなわち2つの局所系のそれぞれに大きさの同じSLCが1つ現れる。また局所系の解の位相差は初期値によって異なる。

ところが D_p の値を少し大きくすると、局所系のそれぞれに、2種類のSLCが存在しうることが見出される。それを $D_p=0.0002$ の場合について示す。図14a,bでは、初期値を $(0.3, 0.1, 0.25, 0.89, 0.08, 0.2)$ と $(0.9, 0.08, 0.2, 0.35, 0.1, 0.15)$ に選び、2つの解の長時間後の軌道を n_1p_1 平面、 n_2p_2 平面の中に描いている。夫々の平面には異なる2つのSLCが現れている。

これを詳しくみると、6次元系の1本の軌道は2つの局所系に同じ大きさのSLCとなって現れている(軌道の濃淡に注目)。いかえると、一方の局所系に大きいSLC(小さいSLC)が現れるとき、他方には同じように大きいSLC(小さいSLC)が現れる。

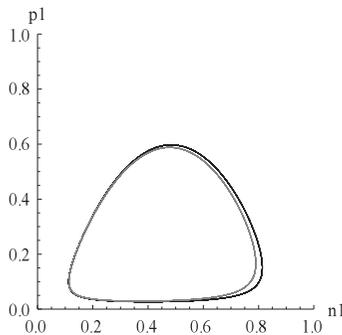


図14a $D_p=0.0002$ n_1p_1 空間の2本の軌道(SLC)。濃淡で区別されている。

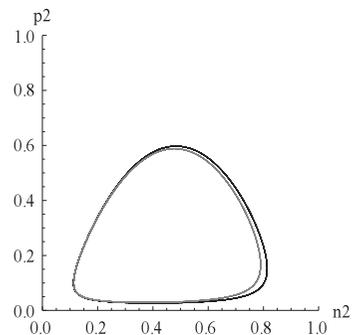


図14b n_2p_2 空間の2本の軌道。濃淡は n_1p_1 空間の軌道と対応する。

SLC) が現れている。そして、どちらのSLCに収束するかは初期値しだいである。(また目視の限りでは、大きいSLCの大きさは孤立系に存在していたSLCと殆ど同じである。) しかもこのとき、両局所系の大きいSLC同士は同相に同期し、小さいSLC同士は逆相に同期する。図14c (図14d) は、大きいSLC (小さいSLC) の長時間後の n の時系列である。大きいSLCの n_1 と n_2 は重なり、小さいSLCの n_1 と n_2 は位相が π だけずれていることがわかる。

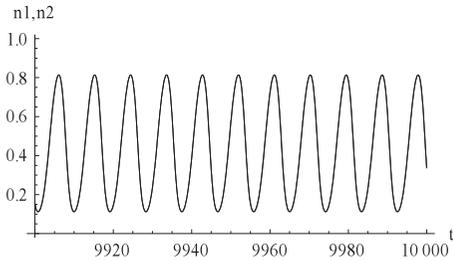


図14c $D_p=0.0002$ 長時間後の時系列。大きいSLC同士が同相に同期している。濃い線 n_1 と薄い線 n_2 が重なっている。

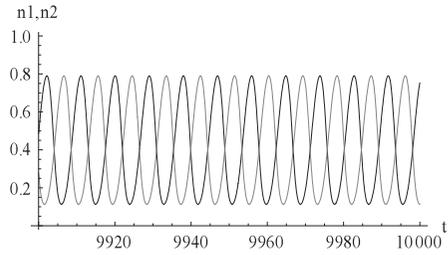


図14d 小さいSLC同士は逆相に同期している。濃い線は n_1 , 薄い線は n_2 である。

また図14e (図14f) は時系列をもとにして描いた、初期 ($t=0$) からの位相リターンマップである。大きいSLC同士は同相に、小さいSLC同士は逆相に同期して行く様子が捉えられている。

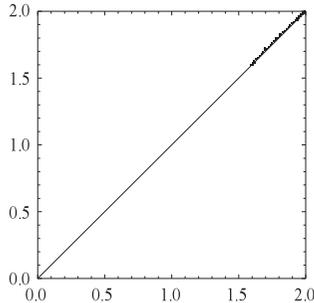


図14e $D_p=0.0002$ 大きいSLCの位相r.map。点は 2π へ収束している。

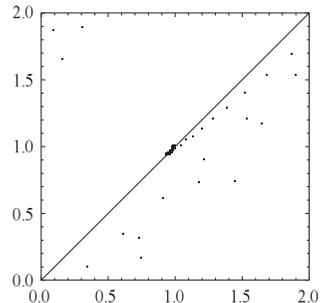


図14f 小さいSLCの位相r.map 点は π へ収束している。

では、局所系にSLCが2個発生できるこうした分岐は、 D_p

のいかなる値で起きるのだろうか。調べてみると臨界値はもっと小さく、区間 $0.00001 < D_p < 0.00005$ の中に存在するようである。だが、その値を詳しく求めることは少々厄介であり、ここではこれ以上追究しない。

また、今回のような新たな分岐が起こるとき、6次元空間中には少なくともこれら2つのSLCの吸引圏が存在するはずである。前にも述べたが、吸引圏を定めることは疫学上重要であると考えられるが、容易ではない。

3-3-2 [51200,0.78 ; 51200,0.78 ; 0,0.001,0]

$D_p=0.001$ の場合。局所系に存在する2つのSLCをみると、外側のSLCは殆ど変化していないが、

内側のSLCが大きく縮んでいる (図15a, b)。

しかし n_1, n_2 の位相差は、大きいSLCの場合に0, 小さいSLCの場合に π である性質は維持される。それぞれの $n_1 n_2$ 空間の軌道図によっても、そのことが判断できる (図15c, d)。大きいSLC同士 の点 (n_1, n_2) の軌跡は直線 $n_2 = n_1$ の上にあり, 小さいSLC同士の場合は直線 $n_2 = n_1$ に対して対称的であるからである。

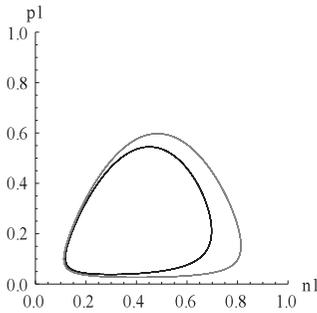


図15a $D_p=0.001$
 $n_1 p_1$ 空間の軌道

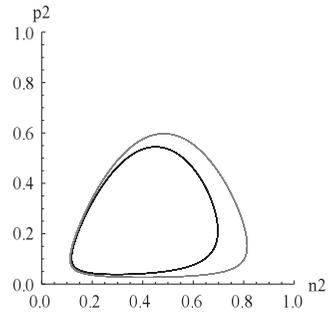


図15b $n_2 p_2$ 空間の軌道

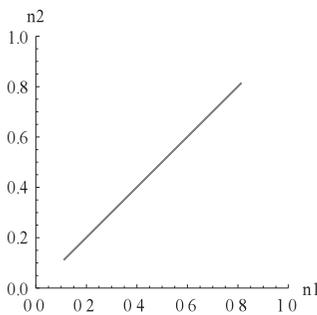


図15c 大きいSLCの
 $n_1 n_2$ 空間の軌道

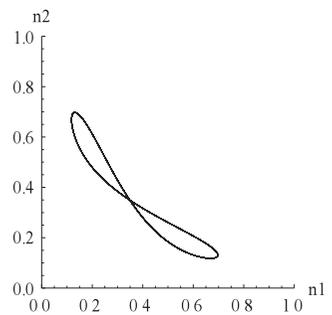


図15d 小さいSLCの
 $n_1 n_2$ 空間の軌道

3-3-3 [51200,0.78 ; 51200,0.78 | 0,0.00232,0]

$D_p=0.003$ のとき, 2つの局所系のどちらにもSLCは一つしか現れない (図は省略)。これは初期値が異なっても (安定特異点に収束する解でなければ) 解はすべて同一のSLCに巻きつくことを意味する。またこのとき解の位相差もほとんど無くなる。つまり強い引き込みが起きることを示している。

では, $D_p=0.001$ において局所系の夫々に存在していた2つのSLCは, いつどのように融合したのであろうか。それを明らかにするために $D_p=0.001$ よりも少し大きい値 $D_p=0.00232$ で調べてみる。このときにもSLCはただ1つ現れるのみである。しかし, 例えば初期値を $(0.3, 0.15, 0.2, 0.25, 0.15, 0.22)$ に選んだ解 n_1 の初期 ($t=0$) からの振幅リターンマップ (図16a) を描いてみると, 振幅は過渡的な増減の後, しばらく0.63の周辺に留まり, そのあと徐々に増大して最後に約0.813 (外側のSLCの, n_1 の最大値に相当) へと収束する様子を捉えることができる。

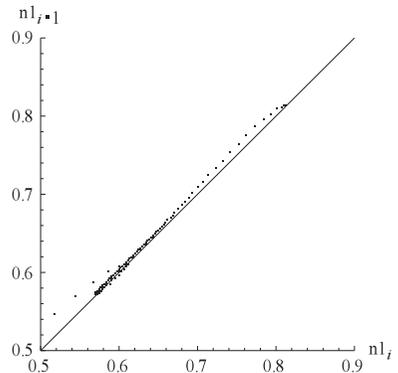


図16a $D_p=0.00232$ のときの
振幅r.mapの例

これはつまり、状態点が過渡的にいったん内側の準安定なアトラクタ（SLCではない）に引き寄せられてのち、外側のSLCに収束していることを示している。言い換えると、 D_p が小さいとき内側に存在していたSLCは崩壊して準安定なアトラクタに変わり、その外側に、最終的な収束先である真のアトラクタ（SLC）が存在する状況が起きているということである。また、位相リターマップ（図16b）からは準安定なアトラクタの周辺における解 n_1 と n_2 の位相差はかなり長く約 1.2π に近い値をとりつづけることがわかる。

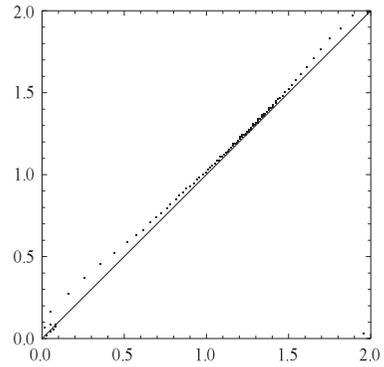


図16b $D_w = 0.00232$ 位相r.map

さらに D_p の値を変化させて調べてみると、こうした分岐は $D_p = 0.002311$ に近い値で実現するようである。しかしこれ以上詳しく分析することはここでは行なわない。

3-3-4 【51200,0.78 ; 51200,0.78 ; 0,0.01,0】

$D_p = 0.01$ 。このとき、2つの局所系には夫々1個のSLCが存在し、両系間に差異はない（図17a, b）。また n_1 と n_2 の間の位相差もなくなる。強い引き込みによってSLCの大きさは完全に回復し位相が揃ったと解される。

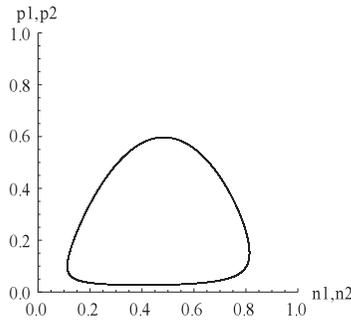


図17a $D_p = 0.01$ $n_1 p_1$ 空間, $n_2 p_2$ 空間の軌道(SLC)は完全に重なる。

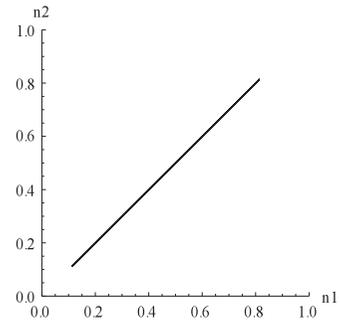


図17b $D_p = 0.01$ $n_1 n_2$ 空間の軌道

この傾向は、 D_p の値をさらに10倍ほど大きくしても変わらない。

以上により、拡散係数 D_p が大きいとき、2つの局所系には同相に同期した安定な流行が存在することが明らかになった。

次節では、FLISの拡散について調べよう。

3-4 【51200,0.78 ; 51200,0.78 ; 0,0, D_w 】：FLISにのみ拡散がある場合

3-4-1 【51200,0.78 ; 51200,0.78 ; 0,0,0.005】

D_w の値が $0 < D_w < 0.005$ にあるとき、無摂動系とほぼ同じ形をしたSLCが局所系の夫々に現れる。また両局所系の解の位相差は初期値によってまちまちである。しかし D_w の値を大きくするにつれて位相差は徐々に π に近い値に収束する傾向がみられる（詳細略）。

$D_w=0.005$ のとき、2つの局所系のSLCに差は現れない。初期値を $(0.9, 0.08, 0.2, 0.35, 0.1, 0.15)$ として、 np 空間を重ねて描くと、両局所系の軌道は完全に一致する (図18a)。

また、解の長時間後の位相差は π (逆相同期) となり、これは罹患率 R にも反映する (図18b)。引き込みの表れと考えられる。

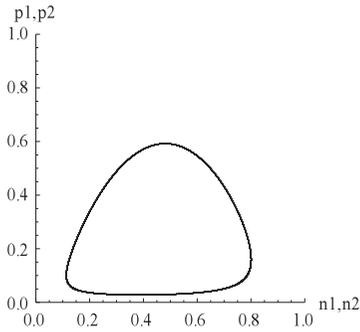


図18a $D_w=0.005$ 第1,第2局所系のSLCは重なっている。

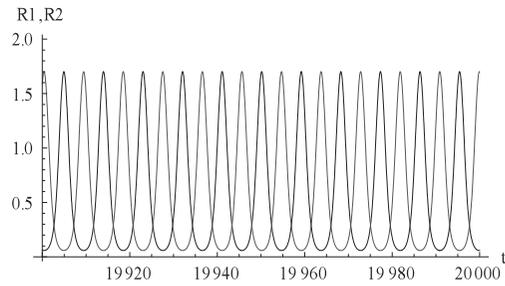


図18b $D_w=0.005$ 罹患率の時系列,濃い線が R_1 ,薄い線が R_2

【* | 0,0,0.1】

$D_w=0.05 \sim 0.1$ で調べると、 np 空間に現れる唯一のSLCは全体に歪みかつ縮小する。しかし、 n_1, n_2 の位相差は、初期値によらず、 π を保つ。罹患率の振幅も少し小さくなるが、大幅な変化はない。 n と p の両方が減少するからである。

$D_w=0.1$ として、 np 空間の軌道と罹患率の時系列を示す (図19a, b)。この段階で、拡散はSLCの軌道の変形 (縮小) に大きく作用している。

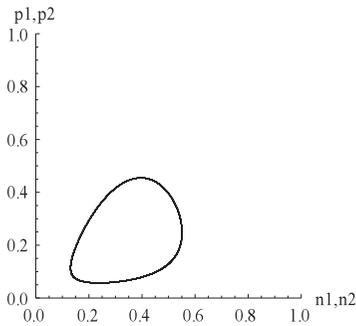


図19a $D_w=0.1$ 第1,第2局所系のSLCは重なっている。

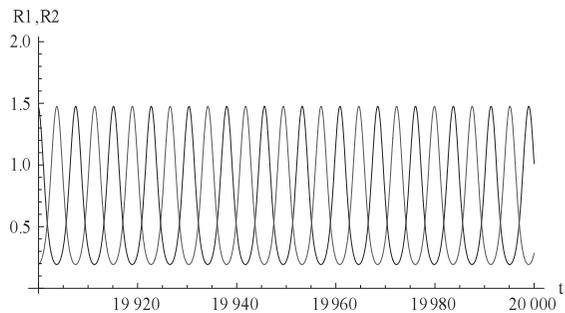


図19b $D_w=0.1$ 時系列,濃い線が n_1 ,薄い線が n_2

3-4-2 【51200,0.78 ; 51200,0.78 | 0,0,0.15】 ~ 【51200,0.78 ; 51200,0.78 | 0,0,0.36】

【* | 0,0,0.15】

$D_w=0.15$ のとき、 np 空間の軌道は“帯”をもったアトラクタに姿を変えている (図20a, b)。解

が準周期解に変化したためと考えられる。またこれは、区間 $0.1 < D_w < 0.15$ の何処かで分岐が発生したことを示唆している。

さらにこの状況を、振幅リターンマップ(図20c)でみると、点は途中で直線 $n_{i+1} = n_i$ に近づいてしばらくその付近に留まる傾向

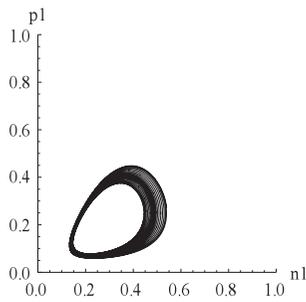


図20a $D_w=0.15$
 n_1p_1 平面での軌道

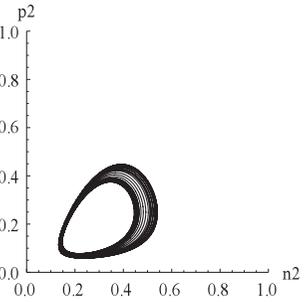


図20b n_2p_2 平面での軌道

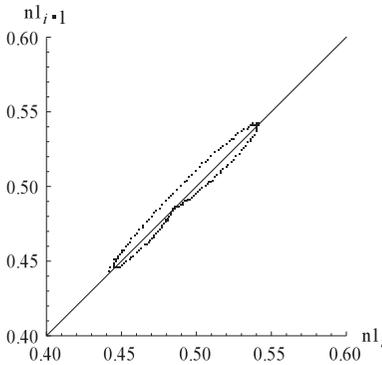


図20c $D_w=0.15$ n_1 の振幅r.map

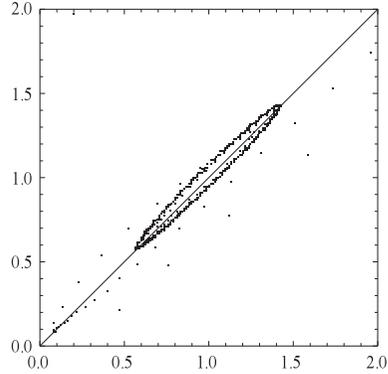


図20d $D_w=0.15$ 位相r.map

があることがわかる。そのためアトラクタの帯の中には濃い縞が現れる。一方、位相差は、 0.58π から 1.42π の間で増減を繰り返している(図20d)。またこの変動には初期値依存性は殆どみられない(詳細略)。

n や p の振幅の時間的変動が反映して、 R の時系列にも長周期の変動が現れるがそれほど大きなものではない(図20e)。

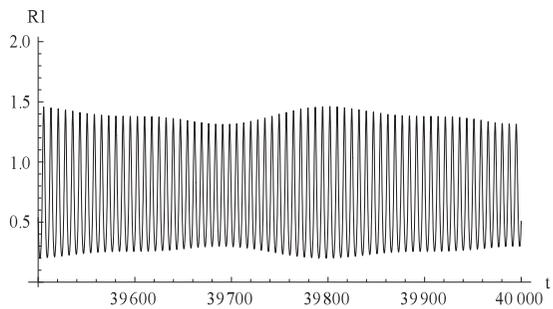


図20e $D_w=0.15$ 罹患率 R_1 の時系列(長時間後)

また、以上のような解の振る舞いは、すでに $D_w=0.0026$ の近くで観察したものに類似している。

[* : 0.0,0.2]

$D_w=0.2$, 初期値を(0.9,0.08,0.2,0.35,0.1,0.15)として軌道を描く。その結果は $D_w=0.15$ の場合と似ているが、軌道が描く“帯”の中の構造がさらに複雑になる(図21a)。繰り返しの様子を見るために、振幅リターンマップでは点を線で繋いで描いている(図21b)。また、図21cでは、

振幅の変動を時系列によって示している。

こうした図から、振幅の変動は、周期的であったとしても、その周期はそうとう長いことがわかる。

また位相リターンマップ

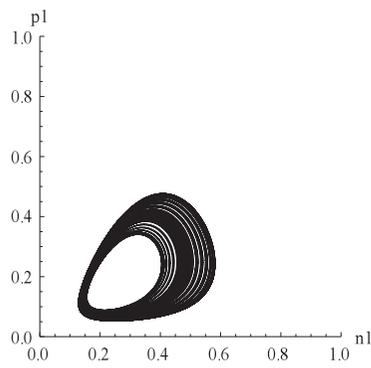


図21a $D_w=0.2$
 n_1p_1 平面での軌道

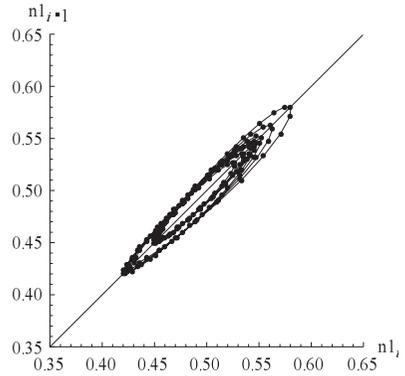


図21b $D_w=0.2$ n_1 の振幅r.map

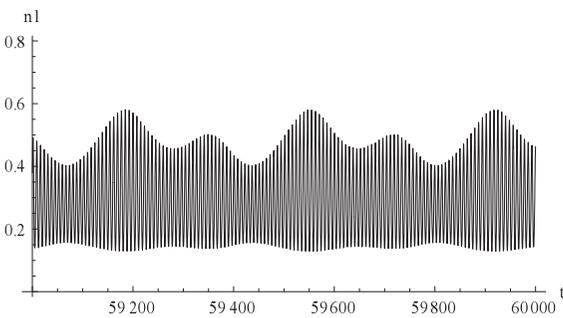


図21c $D_w=0.2$ n_1 の時系列(長時間後)

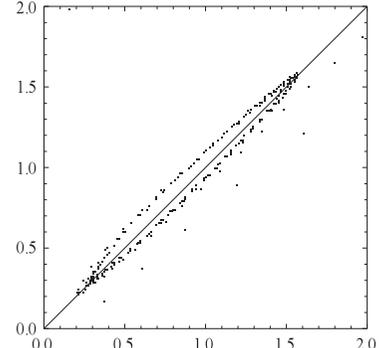


図21d $D_w=0.2$ 位相r.map

は、長時間後の位相の変動がかなり大幅であることを示す (図21d)。ただしこれには初期値依存性がある (詳細略)。

【* | 0,0,0.25】

$0.2 < D_w < 0.25$ では、 np 空間にみられる軌道の帯はさらに広がりを見せる。そのため解の時系列には大きな変動が現れる。位相差も大きく変動し初期値依存性を示す (図は省略)。

$D_w=0.25$ の場合。長時間後の解は大きく振幅を増減させる (図22)。また位相の変動も大きくなり、初期値依存性がある (詳細略)。

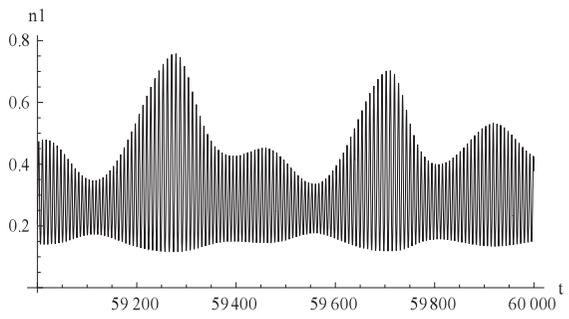


図22 $D_w=0.25$ n_1 の時系列(長時間後)

【* | 0,0,0.36】

$D_w=0.3$ では、解の様子はこれまでと定性的に変わらない。すなわち n_1, n_2 の時系列では振幅の変動が大きく、位相差もまたかなり大幅に変化する。ただし、初期値依存性がある(詳細略)。

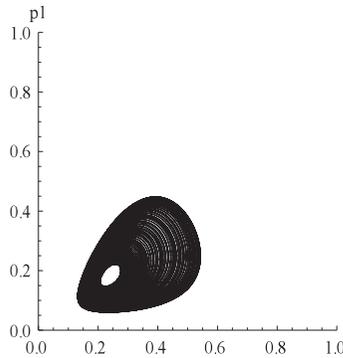


図23a $D_w=0.36$
 n_1p_1 空間の軌道

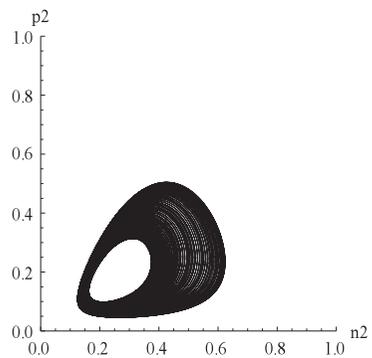


図23b n_2p_2 空間の軌道

$D_w=0.36$ とする。解は準周期的のまま

あるが、アトラクタの規模の差が局所系の間で目立つようになる(図23a,b)。

しかしこれを時系列でみると比較的単純な変動になっている(図23c)。初期値は(0.3,0.15,0.2,0.25,0.15,0.22)にとっている。罹患率の変動も単純になり、 R_1 は概ね0.2~1.46、 R_2 は0.135~1.54で変化する。また、 n_1 と n_2 の位相差は大幅に変動する(図23d)。ただし変化の仕方は初期値に依存する(詳細略)。

この後、 D_w の値を大きくすると、 np 空間の2つのアトラクタは縮小し、帯の幅は徐々に狭くなる。そして $D_w=0.375$ の辺りではアトラクタは殆どSLCと見做しうるまでに変化する。しかし、この間の変化は連続的であり、目視によって分岐値を捉えることは容易ではない。

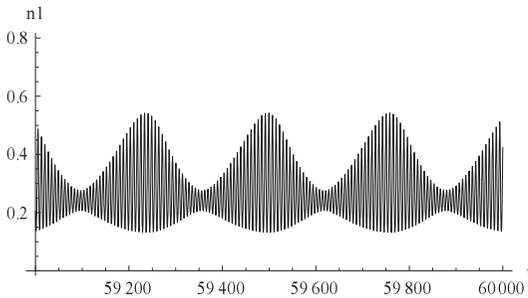


図23c $D_w=0.36$ n_1 の時系列(長時間後)

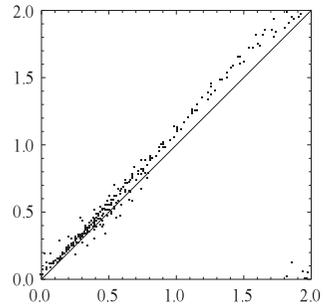


図23d $D_w=0.36$ 位相r.map列

3-4-3 【51200,0.78 ; 51200,0.78 | 0,0,0.4】 ~ 【51200,0.78 ; 51200,0.78 | 0,0,2.5】

【* | 0,0,0.4】

$D_w=0.4$ とし、初期値に(0.3,0.15,0.2,0.25,0.15,0.22)と(0.6,0.18,0.3,0.5,0.12,0.2)を選んで軌道を2本描く。すると局所系の夫々に、異なる2つのSLCが現れる(図24a, b, c)。 $D_w<0.375$ で準周期的であった解はすべて、2つのSLCのいずれかに収束する解に変化したと考えること

ができる。

ここで注意すべきは、1本の6次元軌道は、2つの3次元局所系の夫々にSLCを出現させるが、第1局所系に小さいSLCとして現れるとき、第2局所系には大きいSLCとして現れる点である(初期値のとり方によってその逆もありうる)。— 図24a, b, cでは、2本の軌道を描き、濃い線を第1軌道、薄い線を第2軌道として区別している。

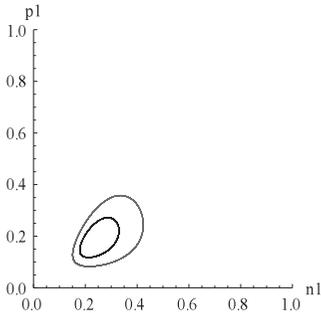


図24a $D_w=0.4$ n_1p_1 空間の軌道

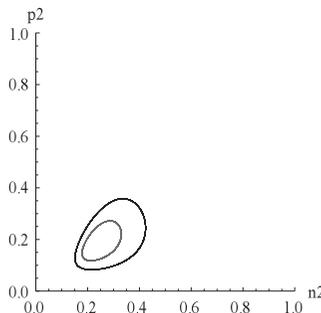


図24b n_2p_2 空間の軌道

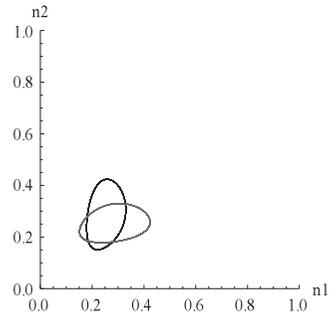


図24c n_1n_2 空間の軌道

こうしたSLC対の出現の仕方は、前節の $D_p=0.001$ のときにみた、大と大、小と小が対になって発現するタイプとは異なる。むしろこれは、 $D_n=0.008 \sim 0.05$ のときに現れたSLC対のタイプと同類である。

軌道が単純なSLCに変わったことから、時系列には振幅の変動はみられなくなる(図は省略)。図24d, eは、(収束は速くないが)位相差が一定値に収束する傾向があることを示している。さらにこの図には、第1, 第2軌道の解の位相差の収束値が、(先述、 $D_n=0.05$ のとき見たように) $\pm \phi$ となる規則性が現われている。

長時間後の罹患率についてみても、局所系の間で差はあるものの、位相差は一定になっている(図24f)。

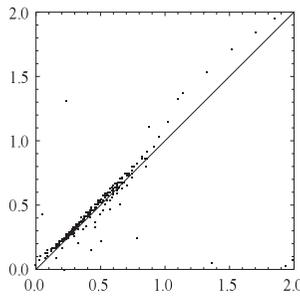


図24d $D_w=0.4$ 位相r.map
第1軌道の場合

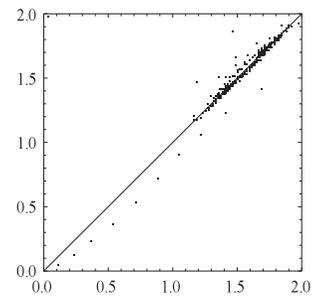


図24e $D_w=0.4$ 位相r.map
第2軌道の場合

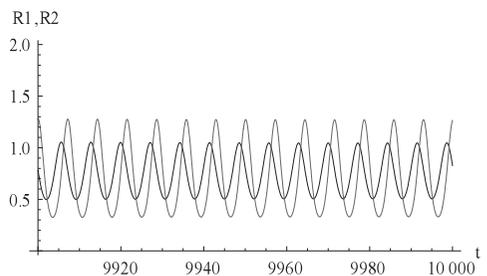


図24f $D_w=0.4$ 第1軌道の場合の罹患率 R_1 と R_2 の時系列。濃い線が R_1 に対応。

【* | 0,0,1.0】

$D_w=1.0$ 。1本の6次元軌道が一方の局所系に大きいSLCを、他方に小さいSLCを対にして発現させるところは、 $D_w=0.4$ のときと同じである。ただし2個のSLCはいずれも広がっている。

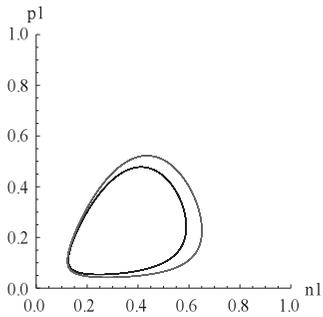


図25a n_1p_1 空間の軌道
($D_w=1.0$)濃い方が第1軌道

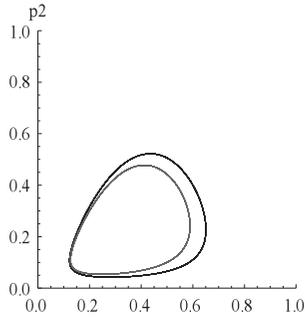


図25b n_2p_2 空間の軌道

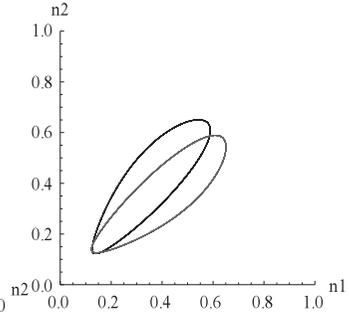


図25c n_1n_2 空間の軌道

とくに、小さいSLCの方がより大きくなり、大きいSLCへ近づいているように見える (図25a, b, c)。図では2本の軌道を濃淡で区別している。軌道のSLCへの収束の仕方は $D_w=0.4$ の場合に比べて速い。これは初期 ($t=0$) からの時系列によって確認できる (詳細略)。

位相差はほぼ $\pm 0.16\pi$ に収束している (図25d, e)。ただし \pm の何れになるかは初期値に依存する。

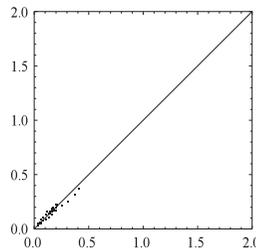


図25d $D_w=1.0$
位相r.map
第1軌道の場合

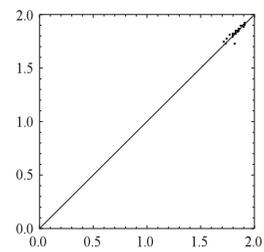


図25e 位相r.map
第2軌道の場合

【* | 0,0,2.5】

$D_w=2.5$ とする。この場合、どの局所系の軌道も夫々ただ一つのSLCに巻きつく。また n_1p_1 平面と n_2p_2 平面を重ねて描くと2つのSLCは完全に重なる (図26)。見かけ上、SLCは孤立系で現われていたものに復活している。しかも2つのSLCは同相に同期する。

罹患率 R_1 と R_2 の変動の幅は大体0.05 ~ 1.7であり、両者は長時間後には同相に同期する。つまり時系列図を重ねて描くと、 R_1 と R_2 のグラフは完全に重なる (図は省略)。

これらはみな、FLISの拡散が大きく、強い引き込みが起きている結果であると考えられる。

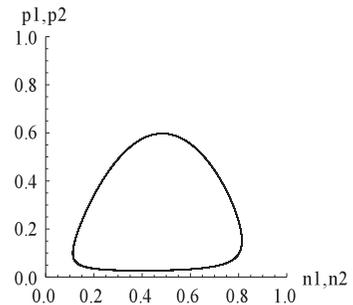


図26 $D_w=2.5$ 強い引き込みにより、解は同相に同期し、局所系には拡散が無いとき現われていたSLCと同じ規模のSLCが復元される。

4. まとめ

マクロパラサイトが関与する感染症の流行は、生物集団の構成要素である寄主やパラサイトやFLISの拡散によってどのような影響を受けるだろうか？こうした疑問から、筆者がかつて提案した、孤立系に対するマクロパラサイト感染症の非線形力学モデルを、拡散結合系に対して適用することにした。しかしながら、一口に拡散結合系といってもそれは多種多様である。なぜなら、結合される系の規模や伝染病の流行状況、さらに系同士の拡散の強弱に、様々なケースが考えられるからである。

そこで今回はまず問題をつぎのように限定した。すなわち、同じ安定な周期的流行が起きている同規模の2つの孤立系（これはパラメータの組を選択することによって実現できる）を拡散によって結合させ、寄主、パラサイト、FLISの各拡散係数を独立なパラメータとして順に変化させる。そしてこのとき、感染症の流行の変容を観察する。—多様な結合系が考えられる中でのこの選択は特殊である。だがこうした系を対象に、3種類の拡散の夫々が引き起こす現象を予め調べておくことは、これから他の結合系を取り扱う際の判断材料になるにちがいない。またさらに、モデルを通して得られる知見は、現実の感染症の流行を理解するうえでの有益な情報になる可能性がある。

では今回の観察結果についてまとめる。

結合前の孤立系の状態は上述のとおりとする。またそのために使用するパラメータの値は、 $\beta = 51200$ ($K=200$), $\lambda=10$, $\mu=8$, $c=16$, $x=0.78$ である。孤立系を結合させるとき用いるパラメータは、寄主の拡散係数 D_n 、パラサイトの拡散係数 D_p 、FLISの拡散係数 D_w の3つである。各パラメータは小から大へと順に値を変化させる。まず結果について大まかに述べると、 D_n を変化させる場合と D_w を変化させる場合とは、(パラメータの値は別にして) 現れる解のパターンが似通っている。しかし D_p を変化させる場合に現れる解は他と大きく様子が異なる。

(1) D_n だけを変化させる場合 ($D_p=D_w=0$)

- ①極めて弱い拡散があるとき ($D_n \approx 0.0001$)、2つの局所系の夫々には、結合の無い場合と殆ど同じ大きさの安定リミットサイクルSLCがただ1つ存在する。ただし両局所系のSLCは逆相に同期する。(“解の位相差”とだけ書いて、2つの局所系の宿主の解 n_1 と n_2 の位相差を意味するものとする。)
- ② D_n を大きくすると ($0.00194 < D_n < 0.0076$)、SLCは縮みかつその形は歪む。このときSLCは準周期解へと(殆ど連続的に)変化し、局所系における周回軌道は(幅のある)帯状の“アトラクタ”に変わる。これに伴い、宿主、パラサイト、罹患率の時系列に長周期の変動が現れる。この変動は D_n が大きくなると徐々に複雑さを増し、位相差も周期的に変動する。ただしこれには初期値依存性がある。
- ③さらに拡散が大きくなると、6次元空間の1本の軌道(安定特異点に収束する軌道を除く)は、一方の3次元局所系に大きいSLCを、他方には小さいSLCを出現させる。従って初期値を取り替えて(何本も)軌道を描くと、片方の局所系には大と小のSLCが、反対側には小と大のSLCが実現可能となる。(ただし大、小2種類のSLCは、局所系が違っていても同じ大

きさである。) 一より詳しく述べると, D_n が0.008に近いとき, SLCの大, 小の差は極端になる。またこのとき, SLC解の位相差は殆どランダムに変動する。 D_n を徐々に大きくしていくと ($0.008 < D_n < 0.3$), 大, 小さいのSLCも拡大し, かつ両SLCの大きさが接近する。と同時に位相差は一定値に収束する。このとき, 大・小SLC解の位相差と小・大SLC解の位相差の間には規則性:「絶対値が等しく符号が反対になる (即ち, $\pm \phi$)」が成り立つ。 D_n をさらに大きくすると (≈ 0.3), 2つのSLCは重なり位相差は0となる ($\phi \rightarrow 0$)。それとともにSLCは拡散の無いときの規模にもどる。強い引き込みが起きる結果である。この後 D_n を大きくしても ($0.3 < D_n < 3$), この状況は変わらない。

(2) D_p だけを変化させる場合 ($D_n = D_w = 0$)

- ①微弱な拡散 ($0 < D_p < 0.00001$) では, 局所系の夫々にSLCが1つ存在し, 両局所系の解の位相差は初期値に依存する。
- ②弱い拡散が入ると ($0.00005 < D_p < 0.002311$), 1本の6次元軌道は, 2つの3次元局所系の夫々に, 初期値に応じて, 大きいSLCかまたは小さいSLCを発現させる。(大きいSLCは, 拡散の無い孤立系で現われるSLCと殆ど差がない。) またここでの特徴は, 一方の局所系に大きいSLC (小さいSLC) が現われるとき, 他方にも大きいSLC (小さいSLC) が対になって現れる点である。解の位相差は, 大きいSLC対では0, 小さいSLC対では π である。さらに D_p の値が大きくなると, 内側の小さいSLCのみ縮小し, ついに $D_p = 0.002311 \dots$ のとき崩壊する。一しかし, D_p が $0.002311 \dots$ を超えてからも少なくとも 0.00232 までは, 内側に存在していた小さいSLCは準安定なアトラクタとして残留する。
- ③拡散が強くなると ($0.00232 < D_p < 0.01$), 2つの局所系の夫々にSLCはただ1つ存在する。このSLCは, D_p が小さい値のとき存在していた2つのSLCの外側の1つに他ならない。そのため解の位相差は0である。結局, 位相の揃った, 孤立系の場合と同規模のSLCが現われる。強い引き込みが起きる結果である。またこの現象は D_p の値が 0.01 を超えても変わらない ($0.01 < D_p < 0.3$)。

(3) D_w だけを変化させる場合 ($D_n = D_p = 0$)

- ①微弱な拡散では ($0 < D_w < 0.005$), 流行の状況は無拡散系の場合と殆ど変わらない。そして拡散がわずかに強くなると ($0.005 < D_w < 0.1$), 夫々の系には変形され縮小されたSLCがただ1つ存在し, 逆相に同期する。
- ②拡散が強まると ($0.1 < D_w < 0.36$), SLC解は区間 $0.1 < D_w < 0.15$ 中の或る値で準周期解に変化する。それに伴い軌道は帯状のアトラクタに姿を変える。その後, D_w の増加とともに“帯”の幅は広がり, 同時にその構造も複雑化する。解の位相差も初期値によってまちまちになる。しかしそれも D_w が 0.25 の辺りまでであり, それより大きくなると, 比較的単純な振動解に変化する。
- ③拡散がさらに強くなると, まず区間 $0.36 < D_w < 0.4$ 内の或る値で, 各局所系の軌道は, “帯”のあるアトラクタから, 小さいSLCへと変化する。ただし各局所系には, 初期値の違いにより, 大と小の, いずれかのSLCの存在が可能になる (一方の局所系に大きいSLCが現れるとき,

他方には小さいSLCが現れる)。このとき D_w の増加とともに ($0.4 < D_w < 2.5$)、位相差は一定値に収束するようになる。しかも、大・小SLC解の位相差と小・大SLC解の位相差の間には規則性：「絶対値が等しく符号が反対になる（即ち、 $\pm \phi$ ）」が成り立つ。—これは前述の、 D_w だけ変化させる場合に見出された規則性と同じである。さらに D_w の値を大きくしていくと、局所系の2つのSLCは拡がりつつ接近し、それとともに位相差も小さくなる。 $2.5 \leq D_w < 5$ では、2つの局所系に孤立系のときと同規模のSLCが復活し、解は同相に同期する ($\phi \rightarrow 0$)。強い引き込みが起きる結果である。

以上が今回得た結果の概要である。しかしながら、なおこの観察では重要な解を見逃している可能性がある。例えば準周期解が現れる辺りにはカオス的な解が存在しているかもしれない。しかしそれを確かめるには、パラメータをもっと小刻みに変化させるなどの詳しい分析が必要である。また、3種類の拡散係数を変化させたときに現れた、軌道の変形や位相差の規則性に関する理論的な解明は、今後の大きな課題である。さらに今回取り扱った感染症（パラメータを特定の値に選んでいるという意味で特定の感染症といえる）との関連でいえば、寄主、パラサイト、FLISのうちの、2乃至3種類の拡散を同時に持ち込んだ場合に流行解はどうなるか、また流行状況が異なる局所系同士の結合ではどのような現象がみられるか、安定な流行が存在する系と存在しない系の結合ではどうなるか、などの問題が当面の課題として残されている。

参考文献

- 1) 特集：感染症の数理モデル：応用数理 VOL.14 No.2 JUNE 2004 日本応用数学会編集 岩波書店 発売
- 2) R.M.Anderson and R.M.May:Nature 280 (1979) 2 August,361-367
- 3) R.M.May and R.M.Anderson:Nature 280 (1979) 9 August,455-461
- 4) 豊田 薫, 非線形力学系としてのマクロパラサイト感染症の種々相, 四天王寺国際仏教大学紀要 (1998), 短期大学部第38号pp.217-237
- 5) 豊田 薫, マクロパラサイト感染症の数理モデル—リミットサイクルと大域的分岐, 四天王寺国際仏教大学紀要 (2000), 短期大学部第40号pp.27-46
- 6) 豊田 薫, マクロパラサイト感染症の数理モデル—リミットサイクルと大域的分岐Ⅱ, 四天王寺国際仏教大学紀要 (2001), 短期大学部第41号pp.93-101
- 7) 豊田 薫, マクロパラサイト感染症の数理モデル—リミットサイクルと大域的分岐Ⅲ, 四天王寺国際仏教大学紀要 (2002), 短期大学部第42号pp.137-149