

あるカードゲームについての数学的一考察

斎藤 敏之

高校で学習する数学の内容の1つに「場合の数」がある。これは、ある事柄が起こりうるすべての場合を数え落とさずに、あるいは二重に数えずに数え上げることである。一般には色の付いた玉や、色の付いたカードを並べる類の問題が多い。本論文で扱うのも色のついたカードを重ねる問題である。問題の概略は次の通りである。「何枚かの2色のカードが与えられたときに、それらをよくきってから、机の上に重ねていく。その際カードの色が互い違いになるように重ねていく。もし同じ色のカードが2枚続けて重なるときは、それらを捨てる。」このような規則でカードを積み重ねるとき、最終的に積み上がるカードは何枚になるか、その場合の数を求めるのが目的である。高校数学で学ぶ順列・組み合わせの方法を適用しただけでは、同じ色のカードが重なったときに捨てるという操作を組み込んで一般的な解を求めるのは困難である。そこで本論文ではカードを重ねることを演算子の並びに置き換えて問題を一般化する。そして漸化式を導いて一般的な解を求め、重なる枚数の期待値を求める。

キーワード：数学

1 序論

この小論では、2色（とりあえず、赤色と青色とする）のカードを机の上に重ねていく、あるゲームについての数学的考察を行う¹⁾。積み重ね方の規則は以下のとおりである。なお、最初に机の上にカードは置かれていない。

カードの積み重ね方

- (i) 机の上にカードが無いときはそのまま置く。
- (ii) 机の上にカードがあつて、最上にあるカードと今置こうとするカードが異なる色なら、そのまま積み重ねる。
- (iii) 机の上にカードがあつて、最上にあるカードと今置こうとするカードが同じ色なら、最上のカードと置こうとするカードを捨てる。なお、捨てたカードはこの後使用しない。

このルールに従って、例えば赤・青・赤・赤・赤・青の順にカードを積み重ねる場合、3枚

1) これは2010年度四天王寺大学一般入学試験前期日程で出題された問題であり、本論文では実際に出題された問題をより一般的にそして掘り下げて考察していく。

目と4枚目の赤いカードを捨てることになり、最後に机の上には赤・青・赤・青の4枚が残る。あるいは、青・赤・赤・赤・赤・青の順にカードを積み重ねる場合だと、最後にカードは残らない。

さて、赤いカードと青いカードの枚数がそれぞれ事前に分かっている、これらをよくきってから上述の規則に従い机の上に積み重ねていくとき、最終的に机の上にカードは何枚残るだろうか？ 先の例からわかるように、赤いカードと青いカードの出てくる順番が変わると、最後に残るカードの枚数は変わる。したがって、最初にそれぞれのカードの枚数がわかったとしても、最後に残る枚数は決まらず、いくつかの場合が考えられることになる。赤いカードの枚数を λ 枚、青いカードの枚数を μ 枚とすると、カードの出方は ${}_{\lambda+\mu}C_{\mu}$ 通りになる。最後にカードが0枚残るのが x_0 通り、1枚残るのが x_1 通り、 $\dots$ 、 $\lambda+\mu$ 枚残るのが $x_{\lambda+\mu}$ 通りとするとき、

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{\lambda+\mu} = {}_{\lambda+\mu}C_{\mu} \quad (1.1)$$

の関係が成り立つ。この x_i の一般形を求めるのが本小論の目的である。改めて問題を書き下してみると以下のとおりである。

問 2色のカードをよくきってから、上述(i)–(iii)の規則にしたがい重ねていく。最初のカードの枚数は与えられているとする。

- (a) 最後に机の上に i 枚残るとき、カードの出方は何通りあるか？
- (b) 最後に机の上に残る枚数の期待値を求めよ。

実はこの x_i の一般形を求める問題はなかなか厄介である。それは上述の規則(ii)と(iii)を以下のように変えてみるとよくわかる。

- (ii)' 机の上にカードがあつて、最上にあるカードといま置こうとするカードが**同じ色**なら、そのまま積み重ねる。
- (iii)' 机の上にカードがあつて、最上にあるカードといま置こうとするカードが**異なる色**なら、最上のカードと置こうとするカードを捨てる。なお、捨てたカードはこの後使用しない。

この場合、色の異なるカードは絶対に接して重なることがないので、 $|\lambda - \mu|$ 枚が最後に残ることになり、問題は非常に簡単である。

あるいは規則(i)–(iii)はそのままにしておいて、カードの枚数を変えてみる。 λ と μ が非常に大きな数として、各カードが出る確率を $1/2$ とする。この場合、もはや色自体に意味はなくなり、積み重ねるか取り去るかの確率が $1/2$ になる。その結果、カードの積み重なり方は乱歩¹⁾の問題に帰着する。カードを積み重ねることをプラス方向に1歩進むとし、カードを取り去ることをマイナス方向に1歩進むと読み替える。全部で N 回繰り返すとし、プラス方向には全部で x_+ 、マイナス方向には x_- 回移動したとする。 N 回後、中心からの移動距離 x

は、 $x = x_+ - x_-$ の関係があり、 $N = x_+ + x_-$ であるから、中心から x 離れる道順は ${}_N C_{x_+} = {}_N C_{\frac{N+x}{2}}$ 通りになる。元はカードを重ねる問題だったので、 $x \neq 0$ のとき $-x$ 離れている場合も考慮する必要があり、カードの重なり方は全部で ${}_N C_{\frac{N+x}{2}} + {}_N C_{\frac{N-x}{2}} = 2{}_N C_{\frac{N+x}{2}}$ 通りとなる。なお、 N が偶数で $x = 0$ のときは ${}_N C_{\frac{N}{2}}$ 通りである。

以上見てきたように、上述の規則 (i) – (iii) に従って、事前に枚数のわかっている 2 種類のカードを積み重ねるとき、その積み上がり方を調べるのは意外に厄介である。そこで、次章ではカードを積み重ねる問題を演算子を作用させる問題に一般化する。そして演算子の総数が偶数の場合と奇数の場合とに分けて考察をしていく。

2 問題の一般化

カードゲームを数学的に扱う一つの方法として、演算子と基底を用いて問題を一般化する。机の上にカードが無い状態を基底 $|0\rangle$ で表す。そして、2 色のカードを演算子 $\hat{u}$ と $\hat{d}$ で表し、基底 $|0\rangle$ に左から作用させて、カードを重ねていくことを表す。上記のルールに従えば、演算子を右端から順に見ていったときに $\hat{u}\hat{u}$ または $\hat{d}\hat{d}$ があると、同じ色のカードが重なることに対応するので、これらの演算子は取り除かなければならない。ここではこれを**削除**と呼ぶことにする。 λ 個の演算子 $\hat{u}$ と μ 個の演算子 $\hat{d}$ を任意に並べたとき、同じ演算子が隣あうことがある。これを**可約な並び**と呼ぶことにする。可約な演算子の並びは削除を繰り返すことによって、 $\hat{u}$ と $\hat{d}$ が交互に繰り返す並びに変わる。これを**既約な並び**と呼ぶ。 n 個の $\hat{u}$ と $\hat{d}$ から成る既約な並びを基底 $|0\rangle$ に作用させて、状態 $|\pm n\rangle$ を $|+n\rangle \equiv \underbrace{\hat{d}\hat{u} \cdots \hat{d}\hat{u}}_n |0\rangle$, $|-n\rangle \equiv \underbrace{\hat{u}\hat{d} \cdots \hat{u}\hat{d}}_n |0\rangle$

と定義し、**基底状態**と呼ぶことにする。 $n = 0$ のときの基底状態は基底 $|0\rangle$ に等しい。基底状態 $|n\rangle$ の n を状態の高さと呼ぶ。高さの符号は、既約な演算子の並びが基底 $|0\rangle$ に作用するとき右端の演算子（つまり最初に $|0\rangle$ に作用する演算子）が $\hat{u}$ のときに正 $(+n)$ 、 $\hat{d}$ のときは負 $(-n)$ と定義している。

演算子 $\hat{u}$ の数と $\hat{d}$ の数の和を $N \equiv \lambda + \mu$ とすると、演算子の並べ方は ${}_N C_\lambda$ 通りある。そこで ${}_N C_\lambda$ 通りの演算子の並びを基底 $|0\rangle$ に作用させて足し合わせた状態を N と $m \equiv \lambda - \mu$ を用いて $|N, m\rangle$ と書くことにする。ここで m がとり得る値は $-N, -N+2, \dots, N-2, N$ であり、それ以外の値をとるとき $|N, m\rangle = 0$ と定義する。 $N = 0$ のとき $|0, 0\rangle = |0\rangle$ である。

例えば $N = 4$ で $\lambda = \mu = 2$ のときは

$$\begin{aligned} \hat{u}\hat{u}\hat{d}\hat{d}|0\rangle &= |0\rangle & \hat{u}\hat{d}\hat{u}\hat{d}|0\rangle &= |-4\rangle & \hat{u}\hat{d}\hat{d}\hat{u}|0\rangle &= |0\rangle \\ \hat{d}\hat{u}\hat{d}\hat{u}|0\rangle &= |4\rangle & \hat{d}\hat{u}\hat{u}\hat{d}|0\rangle &= |0\rangle & \hat{d}\hat{d}\hat{u}\hat{u}|0\rangle &= |0\rangle \end{aligned} \quad (2.1)$$

の 6 通りの並べ方があり、状態 $|4, 0\rangle$ は

$$|4, 0\rangle = |4\rangle + 4|0\rangle + |-4\rangle \quad (2.2)$$

のように書ける。式 (2.1) で、基底状態が $|0\rangle$ となる $\hat{u}$ と $\hat{d}$ の並びが 4 通りあるため、式 (2.2) では $|0\rangle$ の前に係数 4 がついている。このように、二種類の演算子が与えられたとき、削除を

繰り返して得られる既約な並びの数はある分布をする。つまり演算子の並びを基底 $|0\rangle$ に作用させてできる基底状態 $|x\rangle$ が $A_{N,m}(x)$ 通りとすると、

$$|N, m\rangle = \sum_x A_{N,m}(x) |x\rangle \quad (2.3)$$

と書くことができる。このように 2 色のカードをテーブルの上に重ねていくゲームで、 x 枚が積み重なるのが何通りかを求める問題は、この分布関数 $A_{N,m}(x)$ を求めることに置き換えることができる。

さて、演算子を並べる際、ルールに従って右から順に見ていくだけでは能率が悪い。実は演算子の並びの途中で $\hat{u}\hat{u}$ や $\hat{d}\hat{d}$ があった場合、これらを削除できる。

定理 1 演算子 $\hat{u}$ と $\hat{d}$ の並びがある。これを基底 $|0\rangle$ に作用させ規則 (i) – (iii) にしたがって削除していく。その際、右端から順に演算子の並びを見ていかずに途中にある $\hat{u}\hat{u}$ や $\hat{d}\hat{d}$ を削除しても結果は同じになる。

(証明) ある演算子の並び $\{\hat{Y}\}\hat{u}\hat{u}\{\hat{X}\}$ がある。ただし、 $\{\hat{X}\}$ と $\{\hat{Y}\}$ は演算子 $\hat{u}$ と $\hat{d}$ の任意の並びとする。この演算子の並びを基底 $|0\rangle$ に作用させる。

$$\{\hat{Y}\}\hat{u}\hat{u}\{\hat{X}\}|0\rangle \quad (2.4)$$

削除は右から順に見ていくので、 $\{\hat{Y}\}$ については考えなくてよい。 $\{\hat{X}\}|0\rangle$ について削除をしていくと、必ず既約な状態 $\hat{u}\hat{d}\cdots|0\rangle$, $|0\rangle$ または $\hat{d}\hat{u}\cdots|0\rangle$ の 3 通りのうちのどれかになる。

(1) $\{\hat{X}\}|0\rangle = \hat{u}\hat{d}\cdots|0\rangle$ の場合

$$\hat{u}\hat{u}\{\hat{X}\}|0\rangle = \hat{u}\hat{u}\hat{u}\hat{d}\cdots|0\rangle = \hat{u}(\hat{u}\hat{u})\hat{d}\cdots|0\rangle = \hat{u}\hat{d}\cdots|0\rangle = \{\hat{X}\}|0\rangle \quad (2.5)$$

(2) $\{\hat{X}\}|0\rangle = |0\rangle$ の場合

$$\hat{u}\hat{u}\{\hat{X}\}|0\rangle = \hat{u}\hat{u}|0\rangle = (\hat{u}\hat{u})|0\rangle = |0\rangle = \{\hat{X}\}|0\rangle \quad (2.6)$$

(3) $\{\hat{X}\}|0\rangle = \hat{d}\hat{u}\cdots|0\rangle$ の場合

$$\hat{u}\hat{u}\{\hat{X}\}|0\rangle = \hat{u}\hat{u}\hat{d}\hat{u}\cdots|0\rangle = (\hat{u}\hat{u})\hat{d}\hat{u}\cdots|0\rangle = \hat{d}\hat{u}\cdots|0\rangle = \{\hat{X}\}|0\rangle \quad (2.7)$$

以上のように、いずれの場合も $\hat{u}\hat{u}$ が並びの途中にあった場合に、それを削除しても得られる結果は変わらない。 $\hat{d}\hat{d}$ についても同様である。

(証明終)

さらに 2 つの演算子 $\hat{U} \equiv \hat{d}\hat{u}$ と $\hat{D} \equiv \hat{u}\hat{d}$ を導入すると、次の系が成り立つ。

系 1 演算子 $\hat{U}$ と $\hat{D}$ の任意の並びが基底 $|0\rangle$ に作用する。このとき並びの途中の $\hat{U}\hat{D}$ または $\hat{D}\hat{U}$

を削除しても、得られる基底状態は同じである。

(証明) $\{\hat{X}\}$ を演算子 $\hat{U}$ と $\hat{D}$ の任意の並びとする。すると $\{\hat{X}\}|0\rangle$ は演算子 $\hat{u}$ と $\hat{d}$ の並びに書き直すことができる。それを $\{\hat{Z}\}|0\rangle$ と書くことにする。定理 1 により、並びの途中の $\hat{u}\hat{u}$ や $\hat{d}\hat{d}$ を削除してもよいので、

$$\hat{U}\hat{D}\{\hat{X}\}|0\rangle = \hat{d}\hat{u}\hat{d}\{\hat{Z}\}|0\rangle = \hat{d}\hat{d}\{\hat{Z}\}|0\rangle = \{\hat{Z}\}|0\rangle = \{\hat{X}\}|0\rangle \quad (2.8)$$

となり、 $\hat{U}\hat{D}$ を削除した場合と同じ基底状態になる。 $\hat{D}\hat{U}$ についても同様である。

(証明終)

3 N が偶数の場合

この章では演算子の数 N が偶数の場合を考える。最初に状態 $|N, m\rangle$ の一般形を導く。すると、式 (2.3) で定義した分布関数 $A_{N,m}(x)$ が得られるので、 x についての平均と分散が計算できる。

3.1 状態 $|N, m\rangle$ の一般形

まず最初に状態 $|N, m\rangle$ についての漸化式を導く。状態 $|N, m\rangle$ は N 個の $\hat{u}$ と $\hat{d}$ の並びを $|0\rangle$ に作用させて得られる。従って、演算子の数が $N-2$ の状態から、以下のように導くことができる。(1) 演算子 $\hat{u}$ と $\hat{d}$ の数が、それぞれ $\lambda-2$, μ の状態に $\hat{u}\hat{u}$ をかける。(2) $\lambda-1$, $\mu-1$ の状態に $(\hat{U} + \hat{D})$ をかける。(3) λ , $\mu-2$ の状態に $\hat{d}\hat{d}$ をかける。これら 3 つの場合を足し合わせて漸化式を導く。

$$\begin{aligned} |N, m\rangle &= |N, \lambda - \mu\rangle \\ &= \hat{u}\hat{u}|N-2, (\lambda-2) - \mu\rangle + (\hat{U} + \hat{D})|N-2, (\lambda-1) - (\mu-1)\rangle \\ &\quad + \hat{d}\hat{d}|N-2, \lambda - (\mu-2)\rangle \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで、定理 1 を用いると次の漸化式が得られる。

$$|N, m\rangle = |N-2, m-2\rangle + (\hat{U} + \hat{D})|N-2, m\rangle + |N-2, m+2\rangle \quad (3.2)$$

この漸化式と状態 $|N, m\rangle$ の定義より、次の命題 1, 2 が成り立つ。

命題 1 N が正の偶数のとき $|N, N\rangle = |N, -N\rangle = |0\rangle$ である。

(証明) $m = N$ を漸化式 (3.2) に代入する。

$$|N, N\rangle = |N-2, N-2\rangle + (\hat{U} + \hat{D})|N-2, N\rangle + |N-2, N+2\rangle \quad (3.3)$$

状態 $|N, m\rangle$ の定義により $|N-2, N\rangle = |N-2, N+2\rangle = 0$ であるから、

$$|N, N\rangle = |N-2, N-2\rangle \quad (3.4)$$

したがって、

$$|N, N\rangle = |N-2, N-2\rangle = \cdots = |0, 0\rangle = |0\rangle \quad (3.5)$$

が成り立つ。 $|N, -N\rangle = |0\rangle$ についても同様である。

(証明終)

命題 2 N が正の偶数のとき $|N, N-2\rangle = |N, -(N-2)\rangle = \frac{N}{2}(\hat{U} + \hat{D})|0\rangle$ である。
(証明) $m = N-2$ を漸化式 (3.2) に代入する。

$$|N, N-2\rangle = |N-2, N-4\rangle + (\hat{U} + \hat{D})|N-2, N-2\rangle + |N-2, N\rangle \quad (3.6)$$

状態 $|N, m\rangle$ の定義により $|N-2, N\rangle = 0$ であるから、

$$|N, N-2\rangle = |N-2, N-4\rangle + (\hat{U} + \hat{D})|N-2, N-2\rangle \quad (3.7)$$

ここから先は数学的帰納法を用いる。まず $N=2$ のとき

$$|2, 0\rangle = (\hat{U} + \hat{D})|0\rangle \quad (3.8)$$

であるので、与式を満足している。そこで $|N-2, N-4\rangle = \frac{N-2}{2}(\hat{U} + \hat{D})|0\rangle$ を仮定し、

漸化式 (3.7) を用い、更に命題 1 より $|N-2, N-2\rangle = |0\rangle$ を用いると、以下のように $|N, N-2\rangle$ を計算することができる。

$$\begin{aligned} |N, N-2\rangle &= \frac{N-2}{2}(\hat{U} + \hat{D})|0\rangle + (\hat{U} + \hat{D})|0\rangle \\ &= \frac{N}{2}(\hat{U} + \hat{D})|0\rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

よって与式が得られた。 $|N, -(N-2)\rangle$ についても同様である。

(証明終)

漸化式 (3.2) を満足する $|N, m\rangle = |N, N-2\mu\rangle$ の一般形は次のように表される。ただし、 $[\mu/2]$ は、 μ が偶数の場合は $[\mu/2] = \mu/2$ 、奇数の場合は $[\mu/2] = (\mu-1)/2$ と定義する。

定理 2 N が 0 以上の偶数のとき、状態 $|N, N-2\mu\rangle$ について次の関係式が成り立つ。

$$|N, N-2\mu\rangle = \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N}{2} C_{\mu-i} C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i} |0\rangle \quad (3.10)$$

(証明)

(1) まず $\mu = 0, 1, N-1, N$ については与式に直接代入して、命題 1, 2 の結果と比較する。

$\mu = 0$ のとき、式 (3.10) で i についての和は $i = 0$ だけなので、

$$|N, N\rangle = {}_{\frac{N}{2}}C_0 {}_0C_0 (\hat{U} + \hat{D})^0|0\rangle = |0\rangle \quad (3.11)$$

となり、命題 1 に一致する。

$\mu = N$ のとき、式 (3.10) の右辺で和を計算するときに $0 \leq i < \frac{N}{2}$ だと $N - i > \frac{N}{2}$ となるため、1 つめの二項係数 ${}_{\frac{N}{2}}C_{N-i} = 0$ となる。そのため残るのは $i = \frac{N}{2}$ のときだけで、

$$|N, -N\rangle = {}_{\frac{N}{2}}C_{\frac{N}{2}} {}_{\frac{N}{2}}C_{\frac{N}{2}} (\hat{U} + \hat{D})^0|0\rangle = |0\rangle \quad (3.12)$$

となり、命題 1 に一致する。

$\mu = 1$ のとき、式 (3.10) で i についての和は $i = 0$ だけなので、

$$|N, N-2\rangle = {}_{\frac{N}{2}}C_1 {}_1C_0 (\hat{U} + \hat{D})^1|0\rangle = \frac{N}{2}(\hat{U} + \hat{D})|0\rangle \quad (3.13)$$

となり、命題 2 に一致する。

$\mu = N-1$ のとき、式 (3.10) の右辺で和を計算するときに $0 \leq i < \frac{N}{2} - 1$ だと $N-1-i > \frac{N}{2}$ となるため、1 つめの二項係数 ${}_{\frac{N}{2}}C_{N-1-i} = 0$ となる。そのため残るのは $i = \frac{N}{2} - 1$ のときだけで、

$$|N, -(N-2)\rangle = {}_{\frac{N}{2}}C_{\frac{N}{2}} {}_{\frac{N}{2}}C_{\frac{N-2}{2}} (\hat{U} + \hat{D})^1|0\rangle = \frac{N}{2}(\hat{U} + \hat{D})|0\rangle \quad (3.14)$$

となり、命題 2 に一致する。

$N = 0, 2$ のときは、上述の証明により与式 (3.10) がすべての μ に対して成り立つので、以下では $N \geq 4$ で $2 \leq \mu \leq N-2$ に対して式 (3.10) がなりたつことを帰納法を用いて証明する。

(2) $N = 4$ のとき

$\mu = 0, 1, 3, 4$ については上述の証明で与式 (3.10) が成り立つことが示されているので、 $\mu = 2$ に対する状態 $|4, 0\rangle$ を最初に計算する。漸化式 (3.2) を用いると、

$$|4, 0\rangle = |2, -2\rangle + (\hat{U} + \hat{D})|2, 0\rangle + |2, 2\rangle \quad (3.15)$$

となる。命題 1 より $|2, \pm 2\rangle = |0\rangle$ であり、命題 2 より $|2, 0\rangle = (\hat{U} + \hat{D})|0\rangle$ であるから、式 (3.15) は

$$|4, 0\rangle = 2|0\rangle + (\hat{U} + \hat{D})^2|0\rangle \quad (3.16)$$

となる。一方、式 (3.10) に $N = 4$, $\mu = 2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} |4, 0\rangle &= \sum_{i=0}^1 {}_2C_{2-i} {}_{2-i}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{2-2i}|0\rangle \\ &= {}_2C_2 {}_2C_0 (\hat{U} + \hat{D})^2|0\rangle + {}_2C_1 {}_1C_1 (\hat{U} + \hat{D})^0|0\rangle \\ &= (\hat{U} + \hat{D})^2|0\rangle + 2|0\rangle \end{aligned} \quad (3.17)$$

となり、式 (3.16) に一致する。

(3) $N = 2k - 2$ ($k \geq 3$) のときに式 (3.10) が成り立つと仮定し、漸化式 (3.2) を用いて、 $N = 2k$ でも式 (3.10) が成り立つことを示す。

$$\begin{aligned}
 & |2k, 2k - 2\mu\rangle \\
 &= |2k - 2, 2k - 2\mu - 2\rangle + (\hat{U} + \hat{D})|2k - 2, 2k - 2\mu\rangle + |2k - 2, 2k - 2\mu + 2\rangle \\
 &= |2k - 2, (2k - 2) - 2\mu\rangle + (\hat{U} + \hat{D})|2k - 2, (2k - 2) - 2(\mu - 1)\rangle \\
 &\quad + |2k - 2, (2k - 2) - 2(\mu - 2)\rangle \\
 &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} {}_{k-1}C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle + \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} {}_{k-1}C_{\mu-i-1} {}_{\mu-i-1}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{[\mu/2]-1} {}_{k-1}C_{\mu-i-2} {}_{\mu-i-2}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i-2}|0\rangle
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

以下、 μ が偶数の場合と奇数の場合に分けて考える。

(i) μ を偶数として $\mu = 2p$ とおき、式 (3.18) へ代入する。

$$\begin{aligned}
 & |2k, 2k - 2\mu\rangle \\
 &= \sum_{i=0}^p {}_{k-1}C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle + \sum_{i=0}^{p-1} {}_{k-1}C_{\mu-i-1} {}_{\mu-i-1}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{p-1} {}_{k-1}C_{\mu-i-2} {}_{\mu-i-2}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i-2}|0\rangle \\
 &= ({}_{k-1}C_{\mu} {}_{\mu}C_0 + {}_{k-1}C_{\mu-1} {}_{\mu-1}C_0) (\hat{U} + \hat{D})^{\mu}|0\rangle \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{p-1} ({}_{k-1}C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i + {}_{k-1}C_{\mu-i-1} {}_{\mu-i-1}C_i + {}_{k-1}C_{\mu-i-1} {}_{\mu-i-1}C_{i-1}) (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle \\
 &\quad + ({}_{k-1}C_p {}_pC_p + {}_{k-1}C_{p-1} {}_{p-1}C_{p-1})|0\rangle \\
 &= {}_kC_{\mu} (\hat{U} + \hat{D})^{\mu} + \sum_{i=1}^{p-1} {}_kC_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle + {}_kC_p|0\rangle \\
 &= \sum_{i=0}^{\mu/2} {}_kC_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

したがって $N = 2k$ において μ が偶数の場合には、式 (3.10) が成り立つことがわかる。

(ii) μ を奇数として $\mu = 2p + 1$ とおき、式 (3.18) へ代入する。

$$\begin{aligned}
 & |2k, 2k - 2\mu\rangle \\
 &= \sum_{i=0}^p {}_{k-1}C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle + \sum_{i=0}^p {}_{k-1}C_{\mu-i-1} {}_{\mu-i-1}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{p-1} {}_{k-1}C_{\mu-i-2} {}_{\mu-i-2}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i-2}|0\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ({}_{k-1}C_{\mu} {}_{\mu}C_0 + {}_{k-1}C_{\mu-1} {}_{\mu-1}C_0)(\hat{U} + \hat{D})^{\mu}|0\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^p ({}_{k-1}C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i + {}_{k-1}C_{\mu-i-1} {}_{\mu-i-1}C_i + {}_{k-1}C_{\mu-i-1} {}_{\mu-i-1}C_{i-1})(\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle \\
&= {}_kC_{\mu}(\hat{U} + \hat{D})^{\mu}|0\rangle + \sum_{i=1}^p {}_kC_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i(\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} {}_kC_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i(\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle \tag{3.20}
\end{aligned}$$

したがって $N = 2k$ において μ が奇数の場合にも、式 (3.10) が成り立つことがわかる。

(証明終)

一般形として式(3.10)は正しいが、よく見ると $\mu > N/2$ のとき、 i が小さいと $\mu - i > N/2$ となることがあり、そのとき二項係数 ${}_{\frac{N}{2}}C_{\mu-i}$ の値がゼロになる。このときは、 $i = \mu - N/2$ から和をとれる。

系 2 N が 0 以上の正の偶数で、 $\mu > N/2$ のとき、状態 $|N, N - 2\mu\rangle$ について次の関係式が成り立つ。

$$|N, N - 2\mu\rangle = \sum_{i=\mu-N/2}^{[\mu/2]} {}_{\frac{N}{2}}C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}|0\rangle \tag{3.21}$$

次に式 (3.10) の $(\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i}$ を展開する。演算子 $\hat{U}$ の数を n_U 、 $\hat{D}$ の数を n_D とする。 $\hat{U}$ と $\hat{D}$ が隣り合って並ぶと、系 1 によりこれらを削除できる。よって演算子の並べ方に関係なく $n_U > n_D$ のときは $\hat{U}^{n_U} \hat{D}^{n_D}|0\rangle = |2(n_U - n_D)\rangle$ となり、 $n_U = n_D$ のときは $\hat{U}^{n_U} \hat{D}^{n_D}|0\rangle = |0\rangle$ 、 $n_U < n_D$ のときは $\hat{U}^{n_U} \hat{D}^{n_D}|0\rangle = |-2(n_D - n_U)\rangle$ の関係がある。括弧を展開すると式 (3.10) は次のようになる。

$$|N, N - 2\mu\rangle = \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} {}_{\frac{N}{2}}C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i {}_{\mu-2i}C_j |2(\mu - 2i - 2j)\rangle \tag{3.22}$$

なお $\mu > N/2$ の場合は系 2 により次のように表してもよい。

$$|N, N - 2\mu\rangle = \sum_{i=\mu-N/2}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} {}_{\frac{N}{2}}C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i {}_{\mu-2i}C_j |2(\mu - 2i - 2j)\rangle \tag{3.23}$$

式 (3.22) を (2.3) と見比べることにより、分布関数 $A_{N,m}(x)$ は以下のように与えられる。

$$A_{N,N-2\mu}(x) = \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} {}_{\frac{N}{2}}C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i {}_{\mu-2i}C_j \delta_{x,2(\mu-2i-2j)} \tag{3.24}$$

上式中 $\delta_{\alpha,\beta}$ はクロネッカーのデルタで、 $\alpha = \beta$ のとき $\delta_{\alpha,\beta} = 1$ 、 $\alpha \neq \beta$ のとき $\delta_{\alpha,\beta} = 0$ で

ある。

$\mu > N/2$ の場合には

$$A_{N,N-2\mu}(x) = \sum_{i=\mu-N/2}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} \frac{N}{2} C_{\mu-i} C_{\mu-i} C_{i} C_{\mu-2i} C_j \delta_{x,2(\mu-2i-2j)} \quad (3.25)$$

と表してもよい。

$\mu \leq N/2$ のとき、言い換えると $\lambda \geq \mu$ の場合、 x は $i = 0, j = 0$ で最大値 $x = 2\mu$ となり、 $i = 0, j = \mu$ で最小値 $x = -2\mu$ となる。逆に $\mu > N/2$ 、つまり $\lambda < \mu$ の場合は x は $i = \mu - N/2, j = 0$ で最大値 $x = 2(N - \mu) = 2\lambda$ となり、 $i = \mu - N/2, j = N - \mu$ で最小値 $x = 2(-N + \mu) = -2\lambda$ となる。つまり 2 つの演算子の数 λ と μ のうち小さい方を κ とすると、 x の取り得る範囲は $-2\kappa \leq x \leq 2\kappa$ である。これは同種の演算子が隣り合っ
て並んだときに削除されるため、少ない方の演算子の数によって既約な並びの長さが決まるためである。

以上で 2 色のカードが λ 枚と μ 枚あったときに、規則に則ってカードを積み重ねた結果、最後に x 枚残る場合の数が分布関数 (3.24) によって得られることがわかった。

ここでいくつかの関係式を与えておく。

定理 3 N が正の偶数のとき分布関数 $A_{N,m}(x)$ について次の関係式が成り立つ (x についての対称性)。

$$A_{N,m}(x) = A_{N,m}(-x) \quad (3.26)$$

(証明) $A_{N,N-2\mu}(-x)$ は式 (3.24) を用いると次のように書ける。

$$A_{N,N-2\mu}(-x) = \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} \frac{N}{2} C_{\mu-i} C_{\mu-i} C_i C_{\mu-2i} C_j \delta_{x,-2(\mu-2i-2j)} \quad (3.27)$$

ここで j を $\mu - 2i - j$ で置き換える。その際、 j について和をとる範囲は変わらないので、 $A_{N,N-2\mu}(-x)$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} A_{N,N-2\mu}(-x) &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} \frac{N}{2} C_{\mu-i} C_{\mu-i} C_i C_{\mu-2i} C_{\mu-2i-j} \delta_{x,2(\mu-2i-2j)} \\ &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} \frac{N}{2} C_{\mu-i} C_{\mu-i} C_i C_{\mu-2i} C_j \delta_{x,2(\mu-2i-2j)} \\ &= A_{N,N-2\mu}(x) \end{aligned} \quad (3.28)$$

(証明終)

定理 4 N が正の偶数のとき、状態 $|N, m\rangle$ は次の関係式を満たす。 $(m$ についての対称性)

$$|N, m\rangle = |N, -m\rangle \quad (3.29)$$

(証明) $m = 0$ ($\mu = N/2$) のときは明らかなので、 $m > 0$ ($0 \leq \mu < N/2$) とする。

$$|N, -m\rangle = |N, -(N - 2\mu)\rangle = |N, N - 2\lambda\rangle \quad (3.30)$$

$N/2 < \lambda \leq N$ であるから系 2 により、

$$|N, -m\rangle = \sum_{i=\lambda-N/2}^{[\lambda/2]} \frac{N}{2} C_{\lambda-i} \frac{N}{2-i} C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\lambda-2i} |0\rangle \quad (3.31)$$

i を $\lambda - N/2 + i$ で置き換えると、

$$|N, -m\rangle = \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N}{2} C_{\frac{N}{2}-i} \frac{N}{2-i} C_{\lambda-\frac{N}{2}+i} (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i} |0\rangle$$

$\frac{N}{2} C_{\frac{N}{2}-i} \frac{N}{2-i} C_{\lambda-\frac{N}{2}+i} = \frac{N}{2} C_{\mu-i} \frac{N}{2-i} C_i$ の関係が成り立つので、

$$\begin{aligned} |N, -m\rangle &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N}{2} C_{\mu-i} \frac{N}{2-i} C_i (\hat{U} + \hat{D})^{\mu-2i} |0\rangle \\ &= |N, N - 2\mu\rangle = |N, m\rangle \end{aligned} \quad (3.33)$$

(証明終)

最後にもう一度、式 (3.22) と (3.23) の意味を考える。左辺は λ 個の $\hat{u}$ と μ 個の $\hat{d}$ を並べてできるすべての状態の和を意味していたから、状態の数は全部で ${}_{\lambda+\mu}C_{\mu} = {}_N C_{\mu}$ である。よって式 (3.22) と (3.23) の右辺で、基底状態 $|x\rangle$ の係数の和は ${}_N C_{\mu}$ に等しいはずであり、以下の命題 3 が成り立つ。

命題 3 N を正の偶数とするととき、以下の関係式が成り立つ。

(1) $0 \leq \mu \leq N/2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} \frac{N}{2} C_{\mu-i} \frac{N}{2-i} C_i \frac{N}{2-2i} C_j &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N}{2} C_{\mu-i} \frac{N}{2-i} C_i 2^{\mu-2i} \\ &= {}_N C_{\mu} \end{aligned} \quad (3.34)$$

(2) $N/2 < \mu \leq N$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{i=\mu-N/2}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} \frac{N}{2} C_{\mu-i} \frac{N}{2-i} C_i \frac{N}{2-2i} C_j &= \sum_{i=\mu-N/2}^{[\mu/2]} \frac{N}{2} C_{\mu-i} \frac{N}{2-i} C_i 2^{\mu-2i} \\ &= {}_N C_{\mu} \end{aligned} \quad (3.35)$$

(証明) $(1+t)^N$ を以下のように展開する。

$$\begin{aligned}
 (1+t)^N &= (1+2t+t^2)^{\frac{N}{2}} \\
 &= \sum_{j=0}^{N/2} \frac{N}{2} C_j (2t+t^2)^j = \sum_{j=0}^{N/2} \frac{N}{2} C_j (2t)^j \left(1+\frac{t}{2}\right)^j \\
 &= \sum_{j=0}^{N/2} \sum_{i=0}^j \frac{N}{2} C_j {}_j C_i 2^{j-i} t^{i+j}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

図 1 の灰色の三角形の部分が式 (3.36) で i と j について和をとる領域である。そこで $\mu = i+j$ とおいて、 μ を一定に (図 1 の太い矢印線に沿って) 和をとるように式 (3.36) を書き換える。

$$(1+t)^N = \sum_{\mu=0}^{N/2} \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N}{2} C_{\mu-i} {}_{\mu-i} C_i 2^{\mu-2i} t^\mu + \sum_{\mu=N/2+1}^N \sum_{i=\mu-N/2}^{[\mu/2]} \frac{N}{2} C_{\mu-i} {}_{\mu-i} C_i 2^{\mu-2i} t^\mu \tag{3.37}$$

$(1+t)^N$ を素直に展開すれば

$$(1+t)^N = \sum_{\mu=0}^N {}_N C_\mu t^\mu \tag{3.38}$$

であるから、式 (3.37) と (3.38) の t^μ の係数を比較することにより、次式を得る。

(1) $0 \leq \mu \leq N/2$ の場合

$$\sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N}{2} C_{\mu-i} {}_{\mu-i} C_i 2^{\mu-2i} = {}_N C_\mu \tag{3.39}$$

(2) $N/2 < \mu \leq N$ の場合

$$\sum_{i=\mu-N/2}^{[\mu/2]} \frac{N}{2} C_{\mu-i} {}_{\mu-i} C_i 2^{\mu-2i} = {}_N C_\mu \tag{3.40}$$

(証明終)

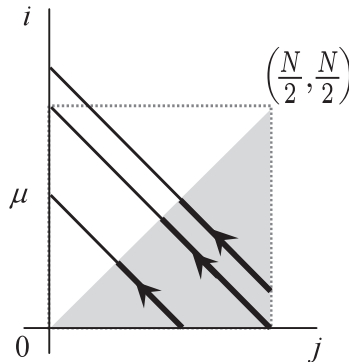


図 1 i と j について和をとる領域 (灰色の部分)

なお、式 (3.40) において i についての和を 0 から計算しても、 $i < \mu - N/2$ では $\frac{N}{2}C_{\mu-i}$ が 0 になるので、式 (3.39) の様に表記できる。

3.2 高さの期待値・分散

最後に状態 $|N, N - 2\mu\rangle$ の高さの期待値と分散を求める。 n を任意の整数として、 x^n についての重み付きの和 $\Xi_{N,\mu}(X^n)$ を次のように定義する。

$$\Xi_{N,\mu}(X^n) = \sum_x x^n A_{N,N-2\mu}(x) \quad (3.41)$$

分布関数 $A_{N,N-2\mu}(x)$ は 1 に規格化されていないので平均値 $\overline{X^n}$ を求めるには、式 (3.41) を NC_μ で割らなければならない。

$$\overline{X^n} = \frac{\Xi_{N,\mu}(X^n)}{NC_\mu} \quad (3.42)$$

以上の定義に基づき、 $h_{N,\mu}$ と高さの期待値 $\bar{h}_{N,\mu}$ を次のように定義する。

$$h_{N,\mu} = \Xi_{N,\mu}(X) \quad (3.43)$$

$$\bar{h}_{N,\mu} = \frac{h_{N,\mu}}{NC_\mu} \quad (3.44)$$

また $h_{N,\mu}^2$, $\Sigma_{N,\mu}^2$ と分散 $\sigma_{N,\mu}^2$ を次のように定義する。

$$h_{N,\mu}^2 = \Xi_{N,\mu}(X^2) \quad (3.45)$$

$$\Sigma_{N,\mu}^2 = \Xi_{N,\mu}((X - \bar{h}_{N,\mu})^2) = h_{N,\mu}^2 - NC_\mu(\bar{h}_{N,\mu})^2 \quad (3.46)$$

$$\sigma_{N,\mu}^2 = \frac{\Sigma_{N,\mu}^2}{NC_\mu} \quad (3.47)$$

更に高さの絶対値についても同様に定義しておく。

$$H_{N,\mu} = \Xi_{N,\mu}(|X|) \quad (3.48)$$

$$\overline{H_{N,\mu}} = \frac{H_{N,\mu}}{NC_\mu} \quad (3.49)$$

ここから先は上述の定義を用いて、具体的に計算していく。

$h_{N,\mu}$ は式 (3.24) を式 (3.43) と (3.41) に代入することにより次のように書ける。

$$h_{N,\mu} = \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} 2(\mu - 2i - 2j) \frac{N}{2} C_{\mu-i} \mu_{-i} C_i \mu_{-2i} C_j \quad (3.50)$$

右辺の j についての $(\mu - 2i - 2j) \mu_{-2i} C_j$ の和を計算する。

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{\mu-2i} (\mu-2i-2j) {}_{\mu-2i}C_j &= \sum_{j=0}^{\mu-2i} \{(\mu-2i-j) - j\} {}_{\mu-2i}C_j \\
 &= (\mu-2i) \left(\sum_{j=0}^{\mu-2i-1} {}_{\mu-2i-1}C_j - \sum_{j=1}^{\mu-2i} {}_{\mu-2i-1}C_{j-1} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

したがって、式 (3.50) に代入して $h_{N,\mu} = 0$ を得る。

同様に $h_{N,\mu}^2$ を計算する。

$$h_{N,\mu}^2 = 4 \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} (\mu-2i-2j)^2 \frac{N}{2} C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i {}_{\mu-2i}C_j \tag{3.52}$$

j についての $(\mu-2i-2j)^2 {}_{\mu-2i}C_j$ の和を計算する。

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=0}^{\mu-2i} (\mu-2i-2j)^2 {}_{\mu-2i}C_j \\
 &= (\mu-2i) \left(\sum_{j=0}^{\mu-2i-1} (\mu-2i-2j) {}_{\mu-2i-1}C_j - \sum_{j=1}^{\mu-2i} (\mu-2i-2j) {}_{\mu-2i-1}C_{j-1} \right) \\
 &= 2(\mu-2i) \sum_{j=0}^{\mu-2i-1} {}_{\mu-2i-1}C_j \\
 &= (\mu-2i) 2^{\mu-2i}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

式 (3.53) を (3.52) へ代入する。

$$\begin{aligned}
 h_{N,\mu}^2 &= 4 \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N}{2} C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i (\mu-2i) 2^{\mu-2i} \\
 &= 4N \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} \frac{N-2}{2} C_{\mu-1-i} {}_{\mu-1-i}C_i 2^{\mu-1-2i}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

ここで関係式 (3.34) を用いると $h_{N,\mu}^2$ は次のようになる。

$$h_{N,\mu}^2 = 4N {}_{N-2}C_{\mu-1} = \frac{4\mu(N-\mu)}{N-1} {}_NC_{\mu} \tag{3.55}$$

$\bar{h}_{N,\mu} = 0$ であるから、 $\Sigma_{N,\mu}^2 = h_{N,\mu}^2$ であり、分散は定義により次のようになる。

$$\sigma_{N,\mu}^2 = \frac{4\mu(N-\mu)}{N-1} \tag{3.56}$$

$\bar{h}_{N,\mu} = 0$ であるが、これは基底状態の高さが負になりうるためである。本論文の出発点は、机の上にカードを重ねていくゲームについての考察であり、その意味では高さが負の値になることはない。そこで最後に $H_{N,\mu}$ と $\overline{H_{N,\mu}}$ を導く。定義により $H_{N,\mu}$ は次のように書ける。

$$H_{N,\mu} = \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{\mu-2i} 2|\mu-2i-2j| \frac{N}{2} C_{\mu-i} \mu-i C_i \mu-2i C_j \quad (3.57)$$

$(\mu-2i-2j)$ の j を $\mu-2i-j$ で置き換えると $-(\mu-2i-2j)$ となり、符号が反転する。したがって、式 (3.57) を計算するには右辺の j についての和を $0 \leq j \leq [\mu/2] - i$ の範囲で計算して 2 倍すればよい。

$$H_{N,\mu} = 4 \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \sum_{j=0}^{[\mu/2]-i} (\mu-2i-2j) \frac{N}{2} C_{\mu-i} \mu-i C_i \mu-2i C_j \quad (3.58)$$

以下では μ が偶数の場合と奇数の場合に分けて考える。

(1) μ が偶数の場合 ($\mu = 2k$ とする)

式 (3.58) で j についての和は

$$\sum_{j=0}^{k-i} (2k-2i-2j) {}_{2k-2i}C_j = (k-i) {}_{2k-2i}C_{k-i} \quad (3.59)$$

となるので、これを式 (3.58) に代入する。

$$\begin{aligned} H_{N,\mu} &= 4 \sum_{i=0}^{\mu/2} \left(\frac{\mu}{2} - i \right) \frac{N}{2} C_{\mu-i} \mu-i C_i \mu-2i C_{\frac{\mu-2i}{2}} = 4 \sum_{i=0}^{\mu/2} \left(\frac{\mu}{2} - i \right) \frac{N}{2} C_{\frac{\mu}{2}} \frac{N-\mu}{2} C_{\frac{\mu}{2}-i} \frac{\mu}{2} C_i \\ &= 2\mu \sum_{i=0}^{\mu/2} \frac{N}{2} C_{\frac{\mu}{2}} \frac{N-\mu}{2} C_{\frac{\mu}{2}-i} \frac{\mu}{2}-1 C_i \end{aligned} \quad (3.60)$$

m, n, μ を正の整数として、二項係数には次の関係が成り立つ²⁾。

$$\sum_{i=0}^{\mu} m C_i {}_n C_{\mu-i} = {}_{m+n} C_{\mu} \quad (3.61)$$

この関係式を式 (3.60) に用いる。

$$H_{N,\mu} = 2\mu \frac{N}{2} C_{\frac{\mu}{2}} \frac{N-\mu}{2}-1 C_{\frac{\mu}{2}} = 4 \left(\frac{\mu}{2} + 1 \right) \frac{N}{2} C_{\frac{\mu}{2}+1} \frac{N}{2}-1 C_{\frac{\mu}{2}-1} \quad (3.62)$$

最終的に高さの絶対値の期待値は次のようになる。

$$\overline{H_{N,\mu}} = 4 \left(\frac{\mu}{2} + 1 \right) \frac{\frac{N}{2} C_{\frac{\mu}{2}+1} \frac{N}{2}-1 C_{\frac{\mu}{2}-1}}{N C_{\mu}} \quad (3.63)$$

(2) μ が奇数の場合 ($\mu = 2k+1$ とする)

まず式 (3.58) で j についての和を計算する。

$$\sum_{j=0}^{k-i} (2k - 2i - 2j + 1) {}_{2k-2i+1}C_j = (2k - 2i + 1) {}_{2k-2i}C_{k-i} \quad (3.64)$$

これを式 (3.58) に代入し、偶数の場合と同様に計算する。

$$\begin{aligned} H_{N,\mu} &= 4 \sum_{i=0}^{(\mu-1)/2} (\mu - 2i) \frac{N}{2} C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i {}_{\mu-2i-1}C_{\frac{\mu-1}{2}-i} \\ &= 2(\mu + 1) \frac{N}{2} C_{\frac{\mu+1}{2}} \frac{N}{2} - 1 C_{\frac{\mu-1}{2}} \end{aligned} \quad (3.65)$$

よって期待値 $\overline{H_{N,\mu}}$ は次のようになる。

$$\overline{H_{N,\mu}} = 2(\mu + 1) \frac{\frac{N}{2} C_{\frac{\mu+1}{2}} \frac{N}{2} - 1 C_{\frac{\mu-1}{2}}}{{}_N C_\mu} \quad (3.66)$$

3.3 まとめ ～ N が偶数の場合～

式 (3.43) – (3.49) は以下のように導かれる。

$$h_{N,\mu} = \bar{h}_{N,\mu} = 0 \quad (3.67)$$

$$h_{N,\mu}^2 = \Sigma_{N,\mu}^2 = \frac{4\mu(N - \mu)}{N - 1} {}_N C_\mu \quad (3.68)$$

$$\sigma_{N,\mu}^2 = \frac{4\mu(N - \mu)}{N - 1} \quad (3.69)$$

$$H_{N,\mu} = 4 \left(\left[\frac{\mu}{2} \right] + 1 \right) \frac{N}{2} C_{\left[\frac{\mu}{2} \right] + 1} \frac{N}{2} - 1 C_{\left[\frac{\mu-1}{2} \right]} \quad (3.70)$$

$$\overline{H_{N,\mu}} = \frac{H_{N,\mu}}{{}_N C_\mu} \quad (3.71)$$

また状態 $|N, m\rangle$ の例を表1に、式(3.68) – (3.71)に具体的に数値を代入した例を表2に示す。

表 1. 状態 $|N, m\rangle$ の例

λ	μ	$ N, m\rangle$
2	0	$ 2, 2\rangle = 0\rangle$
1	1	$ 2, 0\rangle = 2\rangle + -2\rangle$
0	2	$ 2, -2\rangle = 0\rangle$
4	0	$ 4, 4\rangle = 0\rangle$
3	1	$ 4, 2\rangle = 2 2\rangle + 2 -2\rangle$
2	2	$ 4, 0\rangle = 4\rangle + 4 0\rangle + -4\rangle$
1	3	$ 4, -2\rangle = 2 2\rangle + 2 -2\rangle$
0	4	$ 4, -4\rangle = 0\rangle$
6	0	$ 6, 6\rangle = 0\rangle$
5	1	$ 6, 4\rangle = 3 2\rangle + 3 -2\rangle$
4	2	$ 6, 2\rangle = 3 4\rangle + 9 0\rangle + 3 -4\rangle$
3	3	$ 6, 0\rangle = 6\rangle + 9 2\rangle + 9 -2\rangle + -6\rangle$
2	4	$ 6, -2\rangle = 3 4\rangle + 9 0\rangle + 3 -4\rangle$
1	5	$ 6, -4\rangle = 3 2\rangle + 3 -2\rangle$
0	6	$ 6, -6\rangle = 0\rangle$
8	0	$ 8, 8\rangle = 0\rangle$
7	1	$ 8, 6\rangle = 4 2\rangle + 4 -2\rangle$
6	2	$ 8, 4\rangle = 6 4\rangle + 16 0\rangle + 6 -4\rangle$
5	3	$ 8, 2\rangle = 4 6\rangle + 24 2\rangle + 24 -2\rangle + 4 -6\rangle$
4	4	$ 8, 0\rangle = 8\rangle + 16 4\rangle + 36 0\rangle + 16 -4\rangle + -8\rangle$
3	5	$ 8, -2\rangle = 4 6\rangle + 24 2\rangle + 24 -2\rangle + 4 -6\rangle$
2	6	$ 8, -4\rangle = 6 4\rangle + 16 0\rangle + 6 -4\rangle$
1	7	$ 8, -6\rangle = 4 2\rangle + 4 -2\rangle$
0	8	$ 8, -8\rangle = 0\rangle$
10	0	$ 10, 10\rangle = 0\rangle$
9	1	$ 10, 8\rangle = 5 2\rangle + 5 -2\rangle$
8	2	$ 10, 6\rangle = 10 4\rangle + 25 0\rangle + 10 -4\rangle$
7	3	$ 10, 4\rangle = 10 6\rangle + 50 2\rangle + 50 -2\rangle + 10 -6\rangle$
6	4	$ 10, 2\rangle = 5 8\rangle + 50 4\rangle + 100 0\rangle + 50 -4\rangle + 5 -8\rangle$
5	5	$ 10, 0\rangle = 10\rangle + 25 6\rangle + 100 2\rangle + 100 -2\rangle + 25 -6\rangle + -10\rangle$
4	6	$ 10, -2\rangle = 5 8\rangle + 50 4\rangle + 100 0\rangle + 50 -4\rangle + 5 -8\rangle$
3	7	$ 10, -4\rangle = 10 6\rangle + 50 2\rangle + 50 -2\rangle + 10 -6\rangle$
2	8	$ 10, -6\rangle = 10 4\rangle + 25 0\rangle + 10 -4\rangle$
1	9	$ 10, -8\rangle = 5 2\rangle + 5 -2\rangle$
0	10	$ 10, -10\rangle = 0\rangle$

表 2. 式 (3.68) – (3.71) の計算例

λ	μ	N	${}_NC_\mu$	$h^2_{N,\mu}$	$\sigma^2_{N,\mu}$	$\sqrt{\sigma^2_{N,\mu}}$	$H_{N,\mu}$	$\overline{H_{N,\mu}}$
2	0	2	1	0	0	0	0	0
1	1	2	2	8	4	2	4	2
4	0	4	1	0	0	0	0	0
3	1	4	4	16	4	2	8	2
2	2	4	6	32	5.333	2.309	8	1.333
6	0	6	1	0	0	0	0	0
5	1	6	6	24	4	2	12	2
4	2	6	15	96	6.4	2.530	24	1.6
3	3	6	20	144	7.2	2.683	48	2.4
8	0	8	1	0	0	0	0	0
7	1	8	8	32	4	2	16	2
6	2	8	28	192	6.857	2.619	48	1.714
5	3	8	56	480	8.571	2.928	144	2.571
4	4	8	70	640	9.143	3.024	144	2.057
10	0	10	1	0	0	0	0	0
9	1	10	10	40	4	2	20	2
8	2	10	45	320	7.111	2.667	80	1.778
7	3	10	120	1120	9.333	3.055	320	2.667
6	4	10	210	2240	10.67	3.266	480	2.286
5	5	10	252	2800	11.11	3.333	720	2.857

4 N が奇数の場合

4.1 状態 $|N, m\rangle$ について

N が正の奇数の場合の $|N, m\rangle$ は、偶数の場合が前章で既に導かれているので、それに演算子 $\hat{u}$ または $\hat{d}$ を 1 つ作用させることで導くことができる。 $\hat{u}$ の数が λ 、 $\hat{d}$ の数が μ であったから、状態 $|N, \lambda - \mu\rangle$ は $\hat{u}|N - 1, (\lambda - 1) - \mu\rangle$ と $\hat{d}|N - 1, \lambda - (\mu - 1)\rangle$ の和で与えられる。式 (3.22) を用いることにより以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & |N, N - 2\mu\rangle \\
 &= \hat{u}|N - 1, (\lambda - 1) - \mu\rangle + \hat{d}|N - 1, \lambda - (\mu - 1)\rangle \\
 &= \hat{u}|N - 1, (N - 1) - 2\mu\rangle + \hat{d}|N - 1, (N - 1) - 2(\mu - 1)\rangle \\
 &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-i} C_{\mu-i} C_i \sum_{j=0}^{\mu-2i} \mu-2i C_j |2\mu - 4i - 4j + 1\rangle
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-1-i} \mu-1-i C_i \sum_{j=0}^{\mu-1-2i} \mu-1-2i C_j | -2\mu + 4i + 4j + 1 \rangle \quad (4.1)$$

最後の式の第2項を計算する際に、定理3より $\sum_x A_{N,m}(x) \hat{d} |x\rangle = \sum_x A_{N,m}(x) \hat{d} | -x\rangle$ の関係を用いた。

最後に、式(4.1)を(2.3)と比較することにより分布関数 $A_{N,m}(x)$ が得られる。

$$\begin{aligned} A_{N,N-2\mu}(x) &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-i} \mu-i C_i \sum_{j=0}^{\mu-2i} \mu-2i C_j \delta_{x,2\mu-4i-4j+1} \\ &+ \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-1-i} \mu-1-i C_i \sum_{j=0}^{\mu-1-2i} \mu-1-2i C_j \delta_{x,-2\mu+4i+4j+1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

N が奇数の場合、分布関数 $A_{N,m}(x)$ は次の関係を満たす。

定理 5 N が奇数のとき分布関数 $A_{N,m}(x)$ には次の関係が成り立つ (x と m についての対称性)。

$$A_{N,m}(x) = A_{N,-m}(-x) \quad (4.3)$$

(証明) N が奇数のとき $m \neq 0$ であるから $m > 0$ とする。このとき $\mu < \lambda$ であり、 $\lambda > N/2$ であるから、式(3.25)と(4.2)を用いて $A_{N,-m}(-x)$ は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} A_{N,-m}(-x) &= A_{N,N-2\lambda}(-x) \\ &= \sum_{i=\lambda-(N-1)/2}^{[\lambda/2]} \frac{N-1}{2} C_{\lambda-i} \lambda-i C_i \sum_{j=0}^{\lambda-2i} \lambda-2i C_j \delta_{x,-2\lambda+4i+4j-1} \\ &+ \sum_{i=\lambda-1-(N-1)/2}^{[(\lambda-1)/2]} \frac{N-1}{2} C_{\lambda-1-i} \lambda-1-i C_i \sum_{j=0}^{\lambda-1-2i} \lambda-1-2i C_j \delta_{x,2\lambda-4i-4j-1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここで右辺第1項の i を $\lambda - (N-1)/2 + i$ に置き換えると、和を計算する範囲が0から $[(\mu-1)/2]$ に変わる。同様に第2項についても i を $\lambda-1-(N-1)/2 + i$ に変えることにより、0から $[\mu/2]$ に範囲が変わる。

$$\begin{aligned} A_{N,-m}(-x) &= \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} \frac{N-1}{2} C_{\frac{N-1}{2}-i} \frac{N-1}{2}-i C_{\lambda-\frac{N-1}{2}+i} \sum_{j=0}^{\mu-1-2i} \mu-1-2i C_j \delta_{x,-2\mu+4i+4j+1} \\ &+ \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N-1}{2} C_{\frac{N-1}{2}-i} \frac{N-1}{2}-i C_{\lambda-1-\frac{N-1}{2}+i} \sum_{j=0}^{\mu-2i} \mu-2i C_j \delta_{x,2\mu-4i-4j+1} \end{aligned} \quad (4.5)$$

式(4.5)中、二項係数に次の関係がある。

$$\begin{aligned} \frac{N-1}{2} C_{\frac{N-1}{2}-i} \frac{N-1}{2} C_{\lambda-\frac{N-1}{2}+i} &= \frac{N-1}{2} C_{\mu-1-i} \mu-1-i C_i \\ \frac{N-1}{2} C_{\frac{N-1}{2}-i} \frac{N-1}{2} C_{\lambda-1-\frac{N-1}{2}+i} &= \frac{N-1}{2} C_{\mu-i} \mu-i C_i \end{aligned} \quad (4.6)$$

式 (4.6) を (4.5) に代入することにより次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} A_{N,-m}(-x) &= \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-1-i} \mu-1-i C_i \sum_{j=0}^{\mu-1-2i} \mu-1-2i C_j \delta_{x,-2\mu+4i+4j+1} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-i} \mu-i C_i \sum_{j=0}^{\mu-2i} \mu-2i C_j \delta_{x,2\mu-4i-4j+1} \\ &= A_{N,N-2\mu}(x) = A_{N,m}(x) \end{aligned} \quad (4.7)$$

(証明終)

分布関数 $A_{N,m}(x)$ を x について足し合わせた値は、 λ 個の演算子 $\hat{u}$ と μ 個の演算子 $\hat{d}$ の並べ方の総数にはかならない。したがって N が偶数のときと同様に $\sum_x A_{N,m}(x) = {}_N C_\mu$ の関係が成り立つはずである。これは関係式 (3.34) を用いることにより容易に確認できる。

$$\begin{aligned} \sum_x A_{N,N-2\mu}(x) &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-i} \mu-i C_i \sum_{j=0}^{\mu-2i} \mu-2i C_j \\ &\quad + \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-1-i} \mu-1-i C_i \sum_{j=0}^{\mu-1-2i} \mu-1-2i C_j \\ &= {}_{N-1} C_\mu + {}_{N-1} C_{\mu-1} \\ &= {}_N C_\mu \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2 高さの期待値・分散

この節では、高さの期待値 $\bar{h}_{N,\mu}$ や分散 $\sigma_{N\mu}^2$ 等について (式 (3.41) – (3.49))、 N が偶数の場合と同様に計算する。

最初に定義式 (3.43) に式 (4.2) を適用して $h_{N,\mu}$ を計算する。

$$\begin{aligned} h_{N,\mu} &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-i} \mu-i C_i \sum_{j=0}^{\mu-2i} (2\mu-4i-4j+1) \mu-2i C_j \\ &\quad + \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-1-i} \mu-1-i C_i \sum_{j=0}^{\mu-1-2i} (-2\mu+4i+4j+1) \mu-1-2i C_j \end{aligned} \quad (4.9)$$

式 (4.9) の右辺第一項の j についての和を計算する。

$$\sum_{j=0}^{\mu-2i} (2\mu-4i-4j+1) \mu-2i C_j = \sum_{j=0}^{\mu-2i} \mu-2i C_j = 2^{\mu-2i} \quad (4.10)$$

同様に第二項の j についての和を計算する。

$$\sum_{j=0}^{\mu-1-2i} (-2\mu + 4i + 4j + 1) {}_{\mu-1-2i}C_j = - \sum_{j=0}^{\mu-1-2i} {}_{\mu-1-2i}C_j = -2^{\mu-1-2i} \quad (4.11)$$

これらを式 (4.9) に代入する。

$$h_{N,\mu} = \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i 2^{\mu-2i} - \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-1-i} {}_{\mu-1-i}C_i 2^{\mu-1-2i} \quad (4.12)$$

関係式 (3.34) を用いる。

$$h_{N,\mu} = {}_{N-1}C_{\mu} - {}_{N-1}C_{\mu-1} = \frac{N-2\mu}{N} {}_NC_{\mu} \quad (4.13)$$

状態数 ${}_NC_{\mu}$ で割って高さの期待値 $\bar{h}_{N,\mu}$ を得る。

$$\bar{h}_{N,\mu} = \frac{N-2\mu}{N} \quad (4.14)$$

次に高さの二乗 $h_{N,\mu}^2$ を計算する。定義により $h_{N,\mu}^2$ は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} h_{N,\mu}^2 &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i \sum_{j=0}^{\mu-2i} (2\mu - 4i - 4j + 1)^2 {}_{\mu-2i}C_j \\ &\quad + \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-1-i} {}_{\mu-1-i}C_i \sum_{j=0}^{\mu-1-2i} (2\mu - 4i - 4j - 1)^2 {}_{\mu-1-2i}C_j \end{aligned} \quad (4.15)$$

$h_{N,\mu}$ の計算と同様に式 (4.15) の右辺第一項の j についての和をまず計算する。

$$\sum_{j=0}^{\mu-2i} (2\mu - 4i - 4j + 1)^2 {}_{\mu-2i}C_j = \{4(\mu - 2i) + 1\} 2^{\mu-2i} \quad (4.16)$$

第二項の j についての和は次のようになる。

$$\sum_{j=0}^{\mu-1-2i} (2\mu - 4i - 4j - 1)^2 {}_{\mu-1-2i}C_j = \{4(\mu - 2i) - 3\} 2^{\mu-1-2i} \quad (4.17)$$

これらを式 (4.15) へ代入する。

$$\begin{aligned} h_{N,\mu}^2 &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i \{4(\mu - 2i) + 1\} 2^{\mu-2i} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} \frac{N-1}{2} C_{\mu-1-i} {}_{\mu-1-i}C_i \{4(\mu - 1 - 2i) + 1\} 2^{\mu-1-2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4(N-1)_{N-3}C_{\mu-1} + {}_{N-1}C_{\mu} + 4(N-1)_{N-3}C_{\mu-2} + {}_{N-1}C_{\mu-1} \\
 &= 4(N-1)_{N-2}C_{\mu-1} + {}_NC_{\mu}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

なお上式の計算途中で関係式 (3.34) を用いている。

次に $\Sigma_{N,\mu}^2$ を計算する。式 (4.14) と (4.18) を用いると定義により $\Sigma_{N,\mu}^2$ は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{N,\mu}^2 &= 4(N-1)_{N-2}C_{\mu-1} + {}_NC_{\mu} - \left(\frac{N-2\mu}{N} \right)^2 {}_NC_{\mu} \\
 &= \frac{4\mu(N+1)(N-\mu)}{N^2} {}_NC_{\mu}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

よって分散 $\sigma_{N,\mu}^2$ は $\Sigma_{N,\mu}^2$ を ${}_NC_{\mu}$ で割って次のように与えられる。

$$\sigma_{N,\mu}^2 = \frac{4\mu(N+1)(N-\mu)}{N^2} \tag{4.20}$$

最後に高さの絶対値 $H_{N,\mu}$ を求める。定義に従い、次の計算をすればよい。

$$\begin{aligned}
 H_{N,\mu} &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{{}_{N-1}}{2} C_{\mu-i} {}_{\mu-i}C_i \sum_{j=0}^{\mu-2i} |2\mu - 4i - 4j + 1| {}_{\mu-2i}C_j \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} \frac{{}_{N-1}}{2} C_{\mu-1-i} {}_{\mu-1-i}C_i \sum_{j=0}^{\mu-1-2i} |2\mu - 4i - 4j - 1| {}_{\mu-1-2i}C_j
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

以下の計算では μ は偶数とし、 $\mu - 2i = 2k$ とおく。最初に式 (4.21) の右辺第一項の j についての和を計算する。

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=0}^{\mu-2i} |2(\mu - 2i) + 1 - 4j| {}_{\mu-2i}C_j = \sum_{j=0}^{2k} |4k + 1 - 4j| {}_{2k}C_j \\
 &= \sum_{j=0}^k \{4(k-j) + 1\} {}_{2k}C_j + \sum_{j=k+1}^{2k} \{4(j-k) - 1\} {}_{2k}C_j \\
 &= 8 \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) {}_{2k}C_j + {}_{2k}C_k \\
 &= (4k+1) {}_{2k}C_k \\
 &= (2\mu - 4i + 1) {}_{\mu-2i}C_{\frac{\mu-2i}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

同様に第二項の j についての和を計算する。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{\mu-2i-1} |2\mu - 4i - 4j - 1|_{\mu-2i-1} C_j = \sum_{j=0}^{2k-1} |4k - 4j - 1|_{2k-1} C_j \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} (4k - 4j - 1)_{2k-1} C_j + \sum_{j=k}^{2k-1} (4j - 4k + 1)_{2k-1} C_j \\
 &= 4 \sum_{j=0}^{k-1} (2k - 2j - 1)_{2k-1} C_j \\
 &= 4(2k - 1)_{2k-2} C_{k-1} = 2k_{2k} C_k \\
 &= (\mu - 2i)_{\mu-2i} C_{\frac{\mu-2i}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

式 (4.22) と (4.23) を (4.21) へ代入する。

$$\begin{aligned}
 H_{N,\mu} &= \sum_{i=0}^{[\mu/2]} (2\mu - 4i + 1)_{\frac{N-1}{2}} C_{\mu-i}{}_{\mu-i} C_i{}_{\mu-2i} C_{\frac{\mu-2i}{2}} \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{[(\mu-1)/2]} (\mu - 2i)_{\frac{N-1}{2}} C_{\mu-1-i}{}_{\mu-1-i} C_i{}_{\mu-2i} C_{\frac{\mu-2i}{2}} \\
 &= (2\mu + 1) \sum_{i=0}^{\mu/2} \frac{N-1}{2} C_{\mu-i}{}_{\mu-i} C_i{}_{\mu-2i} C_{\frac{\mu-2i}{2}} \\
 &= (2\mu + 1)_{\frac{N-1}{2}} C_{\frac{\mu}{2}} \sum_{i=0}^{\mu/2} \frac{N-1-\mu}{2} C_{\frac{\mu}{2}-i}{}_{\frac{\mu}{2}} C_i
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

ここで二項係数についての関係式 (3.61) を用いると、最終的に $H_{N,\mu}$ は次のようになる。

$$H_{N,\mu} = (2\mu + 1) \left\{ \frac{N-1}{2} C_{\frac{\mu}{2}} \right\}^2 \tag{4.25}$$

更に状態数 ${}_N C_\mu$ で割ることにより期待値 $\overline{H_{N,\mu}}$ が得られる。

$$\overline{H_{N,\mu}} = (2\mu + 1) \frac{\left\{ \frac{N-1}{2} C_{\frac{\mu}{2}} \right\}^2}{{}_N C_\mu} \tag{4.26}$$

なお μ が奇数のときは定理 5 を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned}
 H_{N,\mu} &= \sum_{x=-N}^N |x| A_{N,N-2\mu}(x) = \sum_{x=-N}^N |x| A_{N,-N+2\mu}(-x) = \sum_{x=-N}^N |-x| A_{N,N-2\lambda}(x) \\
 &= H_{N,\lambda}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

λ は偶数であるから、式 (4.25) で μ の代わりに λ を用いれば計算できる。

4.3 まとめ ～ N が奇数の場合～

式 (3.43) – (3.49) は以下のように導かれる。

$$h_{N,\mu} = \frac{N-2\mu}{N} {}_N C_\mu \quad (4.28)$$

$$\bar{h}_{N,\mu} = \frac{N-2\mu}{N} \quad (4.29)$$

$$h_{N,\mu}^2 = \frac{N+4\mu(N-\mu)}{N} {}_N C_\mu \quad (4.30)$$

$$\Sigma_{N,\mu}^2 = \frac{4\mu(N+1)(N-\mu)}{N^2} {}_N C_\mu \quad (4.31)$$

$$\sigma_{N,\mu}^2 = \frac{4\mu(N+1)(N-\mu)}{N^2} \quad (4.32)$$

$$H_{N,\mu} = (2\mu+1) \left\{ \frac{N-1}{2} C_{\frac{\mu}{2}} \right\}^2 \quad (4.33)$$

$$\overline{H}_{N,\mu} = \frac{H_{N,\mu}}{{}_N C_\mu} \quad (4.34)$$

ただし、式 (4.33) と (4.34) で μ は偶数であり、奇数の場合は λ と μ を入れ替える。

状態 $|N, m\rangle$ の例を表 3 に、式 (4.28) – (4.34) に具体的に数値を代入した例を表 4 に示す。

表 3. 状態 $|N, m\rangle$ の例

λ	μ	$ N, m\rangle$
1	0	$ 1, 1\rangle = 1\rangle$
0	1	$ 1, -1\rangle = -1\rangle$
3	0	$ 3, 3\rangle = 1\rangle$
2	1	$ 3, 1\rangle = 3\rangle + 2 -1\rangle$
1	2	$ 3, -1\rangle = -3\rangle + 2 1\rangle$
0	3	$ 3, -3\rangle = -1\rangle$
5	0	$ 5, 5\rangle = 1\rangle$
4	1	$ 5, 3\rangle = 2 3\rangle + 3 -1\rangle$
3	2	$ 5, 1\rangle = 5\rangle + 6 1\rangle + 3 -3\rangle$
2	3	$ 5, -1\rangle = -5\rangle + 6 -1\rangle + 3 3\rangle$
1	4	$ 5, -3\rangle = 2 -3\rangle + 3 1\rangle$
0	5	$ 5, -5\rangle = -1\rangle$
7	0	$ 7, 7\rangle = 1\rangle$
6	1	$ 7, 5\rangle = 3 3\rangle + 4 -1\rangle$
5	2	$ 7, 3\rangle = 3 5\rangle + 12 1\rangle + 6 -3\rangle$
4	3	$ 7, 1\rangle = 7\rangle + 12 3\rangle + 18 -1\rangle + 4 -5\rangle$
3	4	$ 7, -1\rangle = -7\rangle + 12 -3\rangle + 18 1\rangle + 4 5\rangle$
2	5	$ 7, -3\rangle = 3 -5\rangle + 12 -1\rangle + 6 3\rangle$
1	6	$ 7, -5\rangle = 3 -3\rangle + 4 1\rangle$
0	7	$ 7, -7\rangle = -1\rangle$
9	0	$ 9, 9\rangle = 1\rangle$
8	1	$ 9, 7\rangle = 4 3\rangle + 5 -1\rangle$
7	2	$ 9, 5\rangle = 6 5\rangle + 20 1\rangle + 10 -3\rangle$
6	3	$ 9, 3\rangle = 4 7\rangle + 30 3\rangle + 40 -1\rangle + 10 -5\rangle$
5	4	$ 9, 1\rangle = 9\rangle + 20 5\rangle + 60 1\rangle + 40 -3\rangle + 5 -7\rangle$
4	5	$ 9, -1\rangle = -9\rangle + 20 -5\rangle + 60 -1\rangle + 40 3\rangle + 5 7\rangle$
3	6	$ 9, -3\rangle = 4 -7\rangle + 30 -3\rangle + 40 1\rangle + 10 5\rangle$
2	7	$ 9, -5\rangle = 6 -5\rangle + 20 -1\rangle + 10 3\rangle$
1	8	$ 9, -7\rangle = 4 -3\rangle + 5 1\rangle$
0	9	$ 9, -9\rangle = -1\rangle$

表 4. 式 (4.28) – (4.34) の計算例

λ	μ	N	${}_NC_\mu$	$h_{N,\mu}$	$\bar{h}_{N,\mu}$	$h_{N,\mu}^2$	$\sigma_{N,\mu}^2$	$\sqrt{\sigma_{N,\mu}^2}$	$H_{N,\mu}$	$\overline{H_{N,\mu}}$
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	-1	-1	1	0	0	1	1
3	0	3	1	1	1	1	0	0	1	1
2	1	3	3	1	0.333	11	3.556	1.886	5	1.667
1	2	3	3	-1	-0.333	11	3.556	1.886	5	1.667
0	3	3	1	-1	-1	1	0	0	1	1
5	0	5	1	1	1	1	0	0	1	1
4	1	5	5	3	0.6	21	3.84	1.960	9	1.8
3	2	5	10	2	0.2	58	5.76	2.4	20	2
2	3	5	10	-2	-0.2	58	5.76	2.4	20	2
1	4	5	5	-3	-0.6	21	3.84	1.960	9	1.8
0	5	5	1	-1	-1	1	0	0	1	1
7	0	7	1	1	1	1	0	0	1	1
6	1	7	7	5	0.714	31	3.918	1.980	13	1.857
5	2	7	21	9	0.429	141	6.531	2.556	45	2.143
4	3	7	35	5	0.143	275	7.837	2.799	81	2.314
3	4	7	35	-5	-0.143	275	7.837	2.799	81	2.314
2	5	7	21	-9	-0.429	141	6.531	2.556	45	2.143
1	6	7	7	-5	-0.714	31	3.918	1.980	13	1.857
0	7	7	1	-1	-1	1	0	0	1	1
9	0	9	1	1	1	1	0	0	1	1
8	1	9	9	7	0.778	41	3.951	1.988	17	1.889
7	2	9	36	20	0.556	260	6.914	2.629	80	2.222
6	3	9	84	28	0.333	756	8.889	2.981	208	2.476
5	4	9	126	14	0.111	1246	9.877	3.143	324	2.571
4	5	9	126	-14	-0.111	1246	9.877	3.143	324	2.571
3	6	9	84	-28	-0.333	756	8.889	2.981	208	2.476
2	7	9	36	-20	-0.556	260	6.914	2.629	80	2.222
1	8	9	9	-7	-0.778	41	3.951	1.988	17	1.889
0	9	9	1	-1	-1	1	0	0	1	1

参考文献

- 1) ランダム・ウォーク, 津野義道 (牧野書店)
- 2) 数学大公式集, I. S. Gradstein, I. M. Ryzhik 編, 大槻義彦訳 (丸善株式会社)

謝辞

本論文を作成するきっかけをつくってくださった川口隆雄先生に感謝します。