四天王寺国際仏教大学紀要　第43号（2006年12月）

算数・数学教材についての一考察

寺　田　幹　治

（平成18年８月21日受理　最終原稿平成18年10月２日受理）

初等中等教育における算数・数学教育は今ひとつの曲がり角を迎えている。コンピュータの発展に伴い、算数・数学教育に求められているものが変化しはじめている。情報化社会の中では、情報の価値判断の方法が問われる。科学教育の基礎教科である、算数・数学教育は価値判断のもととなる材料を提供するとともに、受験数学ではない、数学の教育が求められている。

本稿では小中高等学校における授業実践を中心に、簡単な離散数学、結び目の数学の導入についての試みと、今後扱われるべき数学の内容と児童、生徒の理解可能性について論じる。大学入試問題を解くことが中心の数学ではなく、事前の準備が余り必要でない教材を導入することによって、子どもたちが同じスタートにたち、今まで授業に参加することを拒否していた子どもたちも参加するようになる。パリティの問題や、鳩ノ巣箱の原理、グラフの話などでは、自分たちで、数学の問題をつくることができるようになり、それに関して議論することにより、理解をさらに深めることになる。結び目の数学の中では少し複雑な結び目、絡み目を見て、ほどけるかどうかを考えることにより、日常生活の中でこんな所にも数学があるのだということを感じさせ、数学をつくっていく過程を体験させることにより、数学に対する興味を感じさせることになる。

キーワード：算数・数学教育、情報教育、離散数学、結び目の数学、教員養成

１．はじめに

最近算数・数学教育の場面で、子どもたちの学力低下、理数離れ、総合学習、学習指導要領の改訂などについて、いろいろな議論が起きている。そこで、これらの問題の解決のために、現代化の停滞後の数学教育のあり方をふり返り、新しい形の数学教育の構築の可能性について論じていきたい。

20世紀初頭の産業革命を契機とした、イギリスのグラスゴー演説からはじまったペリー運動によって、当時の数学教育が強烈に批判され、数学教育の改造運動へと進んだ。60年後に科学技術の進歩による、数学教育の現代化運動に進み、最近では、コンピュータを活用する情報化社会をささえる数学教育に変わりつつある。改造運動の時代は微積分を、現代化の時代は群を中心とする現代数学を、今日の情報化時代は、科学技術の諸分野に奉仕できるように数理科学的な方法が強調されている。万古不変の学問といわれた、初等、中等教育における数学というものが一般に考えられているほどかわらないものではなく、それぞれの時代を背景にする数学によって変化している。

さらに内容から見れば、日本の数学教育の歴史は、明治期のはじめから、「生活と教育」「数学」という2つの基盤を中心にゆれ動いている。戦後の教育(1947年以後)でいえば、「生活単元学習(生活と教育)」→「系統学習(数学)」→「現代化の時代(数学)」→「問題解決(生活と教育)」と2つの方向をゆれ動いている。これらの方向は、単独ではなく、どちらも必要である。子どもたちにとって、これからの社会に生きていくための力(価値の実現活動)と、数学者たちが要求する教科としての数学(数学的感性を育てる)の両方向が必要である。すなわち、大正中期以来の数学教育の論争課題である、形式陶冶説と実質陶冶説を調和させた数学教育の新しい展開が要求されている。

数年前に教え子からの年賀状で、「昨年、子どもが小学校に入学しました。教科書を見たとき特に算数は絵本に見えて仕方がありませんでした。こんなことで学力がつくのでしょうか。」と書いていた。科学教育の基礎である数学の学力低下への懸念は一般の人々の間でも広がり始めている。

現在、社会のいろいろな場面で、マスコミや、インターネットを通じて、いつでもどこでも、誰でも、情報が入手できる情報化社会に突入している。そこでは、誰よりもどこよりも早く情報を入手し、分析し、意志決定をすることが他を制することになる、すなわち情報が社会の基盤になってきている。したがって情報化社会に生きる子どもたちには、自分たちの問題意識でもって、情報を処理する能力が要求される。すなわち、自分たちの意識を持って、情報を収集し、選択し、加工しそして発信する能力が要求される。そこでは数学を中心とする、理系教科の特色を生かした、授業のあり方が模索される必要がある。今までの算数・数学教育の、計算を中心とした、公式に当てはめて解くという知識の注入では、時代の変化に対応しきれなくなってきている。概念や定理の背景にある、数学のもっている特徴を重視する数学教育が求められると考えている。それに基づいて、それを指導のポイントとしてどう生かすのか、そしてそれが理解できる教員の養成を目指して講義を組み立て理論化をすすめる必要があると考える。小・中・高校を通して新しい数学を視野に入れた授業の実践を組み立ててきた。これらの実践を通して得られたことを中心に小学校の教員が基礎教養として持つ必要があると考えられる数学について考察する。

2．数学に対する調査より

最近の国際調査によると日本における現在の小・中学生対象の調査では

1．算数（数学）の好き嫌い（大好き、好き）
　小３　77.8%　　小４　70.9%　　中１　54.3%　　中２　52.6%
2．算数（数学）の勉強は楽しい（強く思う、思う）
　小３　78.9%　　小４　71.8%　　中１　50.9%　　中２　45.9%
3．算数（数学）はやさしい教科である

小3　52.7%　　　小4　40.4%　　　中1　15.3%　　　中2　12.9%

4．算数（数学）でよい成績を取るためには、家でたくさん勉強をすること

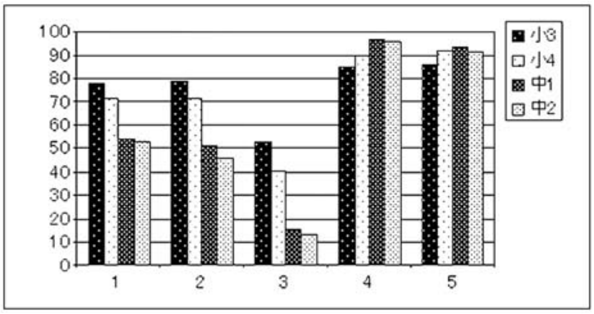
小3　84.6%　　　小4　89.8%　　　中1　97.1%　　　中2　96.0%

5．教科書やノートに書いてあることを覚えること

小3　85.6%　　　小4　92.0%　　　中1　93.5%　　　中2　91.8%

（第3回国際数学教育調査国内中間報告書[1]p.86～p.88による）

となっている。一般的に算数・数学というものが計算や記憶に頼ることが、重要であり、算数・数学が好きである、楽しい、やさしいとも小学校と中学校で数字の大きな動きが見られる。



（第3回国際数学教育調査国内中間報告書[1]p.86～p.88による）

数学はやさしい教科ではなく、特に中学校においては、80%以上の生徒がやさしくはないと答えている。この数字は、小学校の先生になるはずの学生にも引き継がれる。

毎年の算数の講義のはじめに、数学に関する簡単なテストと彼らの思いについて書かせている。調査は2002年から毎年行っているが2002年のデータと2005年のデータとの比較である。

問題1．$\frac{7}{8}-\frac{4}{5}=(1)$

問題2．$\frac{1}{6}\div\frac{7}{5}=(2)$

問題3．$\frac{8}{9}-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}=(3)$

問題4．$3\times\{5+(4-1)\times 2\}-5\times(6-4\div 2)=(4)$

問題5．$2\div 0.25=(5)$

問題6．$-5\times\{8-10\div(-5)\}=(6)$

問題7．$\sqrt{64}=(7)$

問題8．$\sqrt{3}\times\sqrt{27}=(8)$

問題9．$||-1|-|-3||=(9)$

問題10．$3x+1=17$　のとき　$x=(10)$ である

問題11．$3x+y=17$，$2x-5y=3$　の両方を満たす x，y　の値を求めよ（解答欄 (11) に記入すること）

問題12．$3x+1<4$　をみたす x の範囲は (12) である

問題13．$2x+3<2$，$3x+1>-5$　の両方が同時に成り立つ x の範囲は (13) である

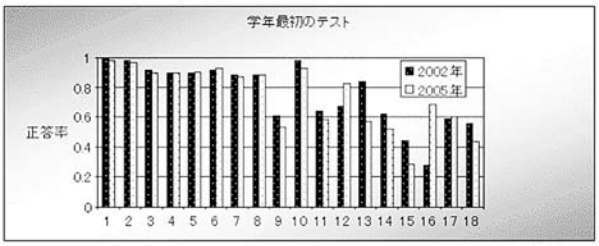
問題14．$3x^2-5x-2=0$ をみたす x は $x=(14)$ である

問題15．$x^2+2x-4=0$ をみたす x は $x=(15)$ である

問題16．$17xy+7=19xy$ のとき，$4xy=(17)$ である

問題17．$\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{9}$ のとき，$x=(17)$ である

問題18．$|x+1|=3$ のとき，$x=(18)$ である



2002年は61人、2005年は118人の各設問ごとの正答率である。全員の正解が要求される、1～6までは90%近くの正答率を出していながら、9,18は絶対値の扱い、11 以後は方程式の処理の問題で、彼らは苦手としている。

算数・数学教育における学力の低下は小学校の教員を養成している現場にも影響を与えている。たとえば上記の調査では小学校程度の内容で１割、中学校・高等学校の内容になると６割から7割の学生が正答できない。

今年の調査では、数学について好きか嫌いかという問いに対しては、好き65%　嫌い35%となっており、「数学」は高等学校までは難しいけれども「重要教科」であると意識しており、問題が解けるという意味で、高等学校の数学ではなく小学校の算数、中学校の数学は好きだったという意見が強い。一般的には、『評価や、入試科目として扱うのでない場合は、学んでみたい教科としては「数学」は２番目だ』といわれていることもこの数字が裏付けている。

同じ調査における学生の「数学」という教科についての意見で代表的なものをあげてみる。

『小学校の算数は文章題が出てくると考えることをしてこなかったので好きではありませんでした。計算はそろばんをやっていたせいか、好きだったと思います。中学校に入って数学の印象がかわりました。先生が好きだったので、授業をまじめに受けていくと、家で自分で勉強したくなり、テストの点も良かったのでみるみる好きになっていきました。高校に入っても先生のおかげで数学が好きでした。数学は受験に必要な科目だったため、最後まで頑張ることが出来ました。答えがぱっとすぐに出ない問題に何個も公式を当てはめたりして出した答えが当たったりするとうれしいと思う気持ちを何度も味わったからかなあと思います。(学生Ａ女)』

『小中学校の頃の算数や数学は好きで、積極的に取り組んできました。小学校の頃にそろばんを習っていたおかげで計算問題は特に好きでした。文章問題は得意というわけではありませんでしたが、何とか解けていたので、それほど苦にならなかったです。中学生になっても計算問題は好きだったのですが、だんだん図形の問題が出てくるにつれて、少しずつわからなくなってきて、数学の中でも得意な分野、不得意な分野が現れるようになってきたことを覚えています。とくに不得意なところは空間図形で、図形が立体になって斜めに立体などを切断して自分で図形を頭の中につくって考える問題などは全く図形がどのようになっているか浮かばずに悪戦苦闘していました。しかし何とか友達に放課後教えてもらったり、高校受験の冬には雪で立方体をつくって切断して問題を教えて問題の勉強の仕方をみんなでわかりやすく、楽しく工夫してやっていたので、何とか数学を好きなままで中学を卒業することは出来ました。しかし高校に入学してからの数学は急にわからなくなり、計算はやはり何とかこなせるのですが、わからない問題も多く、だんだんと嫌いになってきました。わかろうともっと自分から積極的に取り組めば良かったのだと思うのですが、本当にやる気もなかったのか、「数学」＝「わからない」と自分の中で考えはじめていました。わからないものから離れようとばかりしていたので、いつの間にか嫌いな教科となり、高校３年では数学の授業を１つも受けていませんでした。(学生Ｂ男)』

この二人の学生の意見はわれわれが算数・数学教育を考えていく上でいくつかの示唆を与えている。現行の教材のままで良いのか、最新の数学の内容をどのように取り入れていくのか、さらに、算数・数学は公式の理解や、計算が出来さえすればいいと考えている生徒をいかに考え直させる必要があるのか。入試に数学のない学生にとって、高等学校の数学は苦痛でしかない。

3．数学の新しい教材

算数・数学教育は、1957年のスプートニクショック以後、1960年代に現代化の時代を迎えた。それは、従来の算数・数学教育の批判の上に立って、集合論から抽象的な数学を導入するなど、数学教育は大きな改革の時期であった。アメリカでは、教育の中からの要求としてではなく、国家の危機という意識のもとに外部からの圧力によって動き出したものであるので、20世紀初頭以来何回かの改革の運動と違って、従来の改革では動かなかった（というよりはむしろ、≪Alice's Cheshire の猫のように、科学者たちは苦笑以外に何も残さず、中等教育の場面から消えていった。(Wooton)≫）第１線の数学者たちが、中等教育の重要性を意識して、現代化運動の中心となった。OECDのNew Thinking in School Mathematics [2]の中で、フランスの J.Dieudonne は“Euclid must go ！”と叫び、数学は抽象的な数学の内容に変えるべきだと主張した。後にハンガリーでの数学教育国際会議のある分科会で、数学教育の現代化の終息に関して“Dieudonne must go！”といわれ、いいわけにつとめていたと聞く。現代化の時代の数学は群論などを中心とする抽象的な数学であった。

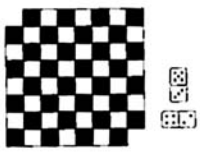
日本では現代化のカリキュラムが実施されたころ、アメリカではすでに次の数学が模索されていた。パーソナルコンピュータが開発され、コンピュータが身近に存在するようになり、抽象的な数学が批判を受けたため、算数・数学教育はコンピュータを中心とする数学へとかわっていった。現代化の次の数学は、コンピュータなどで使われる離散数学が中心になると考える。さらに空間概念のとらえ方に関連して、「結び目の数学」などが初等、中等教育で注目されている。現代化の次の数学を模索しながら、現在の算数・数学教育学の研究と、教室での授業はどうあるべきかという研究をどのように進めるか、どのようにして、教育内容と方法を創造していくかについて考察しているが、子どもの認識にもとづいた、数学教育の研究と授業のあり方、それを教える側が理解しておかなければならない数学の内容・指導方法などを取り上げる。

3－1　離散数学から

離散数学から取り上げられるものは、小中高校で各学年に応じて展開できる、次のような内容のものである。

例１：トニーはある本から連続して何枚かを破り取った。最初のページは123ページで、最後のページは数字が同じであったという。彼は何枚破り取ったのか。([3])（95枚であるが、非現実的かもしれない？　これは本の表のページは奇数、裏のページは偶数という性質による）

例２：（敷き詰めの問題）２つの向かい合う角のかけた８×８のチェス盤をドミノの駒（１個は２マス分）で敷き詰めることは出来るでしょうか。([4])



（角のかけたチェス盤）

例３：１から９までの数を並べて、その間にプラス、またはマイナスの記号を入れて合計を０にすることが出来るか？　([3])（色々試みさせてみる。これはパリティの問題で１から９までの合計は45、一カ所マイナスに変えると偶数減ることになるので、０にすることは不可能）

例４：平面が、黒と白で塗り分けられています。この平面の中に１メートル離れた同じ色の点が必ずあることを示しなさい。([4])(一辺が１メートルの正三角形を書くと、その３つの頂点に黒か白を塗ると必ず同じ色が塗られる頂点がある。)

例５：任意に12個の自然数を選ぶとき、その差が11の倍数になる数の組を少なくとも１つ選ぶことが出来ることを示しなさい。([3])(12個の整数を11で割った余りを考えると、同じものが少なくとも一組ある。その組を取ればいい。)

などの例は離散数学における、パリティの問題、鳩ノ巣箱の原理が使える問題としてとらえられる。パリティの問題は偶奇性の問題ともいわれ「偶数ならば２で割り切れて、２つずつ組にできる。」という原理であり、鳩ノ巣箱の原理とは「ｎ個の巣箱があり、鳩がｎ＋１羽以上いるとすると、鳩が２羽以上入っている巣箱が必ず１つ以上存在する。」という原理である。今までパズルのようにとらえられていた問題であるが、離散数学入門という分野としてとらえることができる。離散数学といってもパリティの問題や、鳩ノ巣箱の原理などはそれ自身で閉じた分野として扱え、かつ応用範囲の広い原理である。このほか、順列組み合わせの問題や、グラフの問題（点と直線とから成り立つグラフであり、一筆書きやネットワークの問題などに利用できる。）へと発展させていくことも可能である。グラフの問題については次のような展開を考えている。

1.　グラフとは何か、頂点の次数－頂点に集まっている辺の数
　　新しいグラフの定義、オイラーのグラフ。
2.　グラフ　同型、木、オイラーの定理、いろいろな問題。有限グラフ。

このプランによる高校生に対する実験では、「今まで、このような話は聞いたことがなかったので、グラフというのはすぐに１次関数や２次関数を考えていた。新しい内容と聞いて、おもしろいなあと思った。最初の問は簡単すぎてパズルの問題のような感じがしたが（注　パリティの問題、鳩の巣箱の原理)、このような簡単な原理で、今まで考えられないような問題が解けることに驚きました。一筆書きについても、オイラーの橋の問題などで、奇数（次数）の点が３つ以上あればかけないということは聞いていましたが、マッチングであるとか、ハミルトン閉路などの名前を聞くと楽しくなりました」。

同じプランで大学生に試みたとき、「・・・だんだん理論的になり難しくなって悩まされることが多くなってくるのですが、このように論理的で構造的で、さらに図形の問題を、早い段階で子どもたちに教えることができれば、いろいろ他の問題解決に役に立つと思います。今ま

で学んだことのない内容なので、本当に楽しく学ぶことができるのではないかと思います。」

授業の終わりには、彼らに授業に関連する問題をつくらせる。中高校生では、

① 水星、金星、地球、地球の月、火星の５つの星の間に航空路（ロケットによる）を開きます。すべての星同士に航路が１本あるとしたら航路は何本必要でしょうか。

② ある小さなビルには構内電話が15台あります。どの電話も他の５台の電話と結ばれるように配線することは可能でしょうか。

③ ある小学校のクラスで、友だちと握手会をしました。奇数人の相手と握手した人は偶数人であることを示しなさい。

などの問題があげられた。（これらの問題は学生が自分たちでつくったというより、既成の問題を一部変更した形のものが多かった。①は（５×４）/２＝10　②15×５は奇数であるから不可能。③は頂点を生徒、握手をしたということを辺としてグラフを表すと奇数個の辺をもった頂点は偶数個でなければならないことが分かる。）

高校の数学は、抽象的な問題が多い。証明は、常にパターンを探すことからはじまる。しかし、ここでの数学は、反例を一つ示すだけで良かったり、教科書の数学よりも、発想やひらめき、イメージ作りが必要になってくる。これらの数学は、小中高校各段階で、生徒に応じた内容で発問でき、今までの数学と違って、できないということをはっきりと証明でき、証明の意味や、成り立たないことの理解などに効果がある。

３－２　結び目の数学

日本の子どもたちは、小さい頃から、あやとりなどを通して、ひもの扱いには慣れている([9])。靴のひもを結んだり、リボンを結んだり、大人になると、のし袋の「のし」などの例があげられる。さらに古い時代では、縄文土器などにもひもの扱いが見られる。これはオーストラリアの原住民やメキシコの遺跡などでも見られる。古くから研究され、最近新しく見直され始めた結び目の数学について、初等、中等教育への導入を考える。この教材は、絵に描くことができるという意味で分かりやすく、予備知識を余り必要としないので、子どもたちの段階に応じた閉じた内容で、応用範囲の広い教材である。

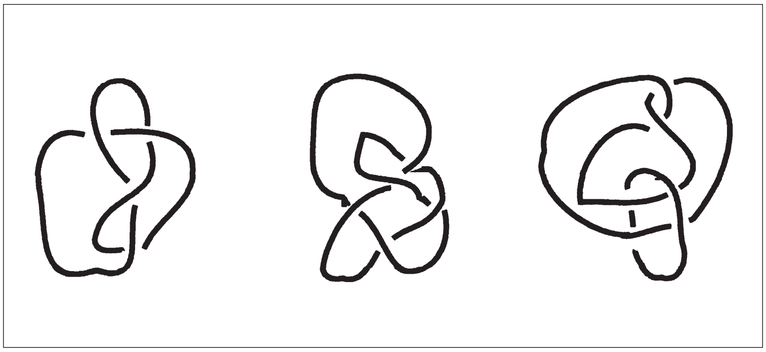
結び目理論における最初の有名な結び目の話は、ギリシャ、ローマの時代に求められるが、学問の世界で注目を浴びるのは、ガウスがはじめて数学的対象として扱って以来である。その後、全宇宙を満たしている仮想的物質エーテル中の結び目が原子であると考えられた（渦巻き原子説）。19世紀の末に誕生した「結び目の数学」は、エーテルの考えが廃れると共に忘れ去れていたが20世紀末になって生命化学（DNAの解析など）や天文学、高分子化学などの分野の発展と共に、見直されるようになってきた。大阪市立大学の河内明夫教授を中心とするグループが、2004年度の21世紀COE 拠点プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成」として指定され、一躍数学の中での注目が集まっている。この結び目理論の入門としての簡単な概要と、初等中等教育における展開について考察することを目標に、河内教授の指導のもと

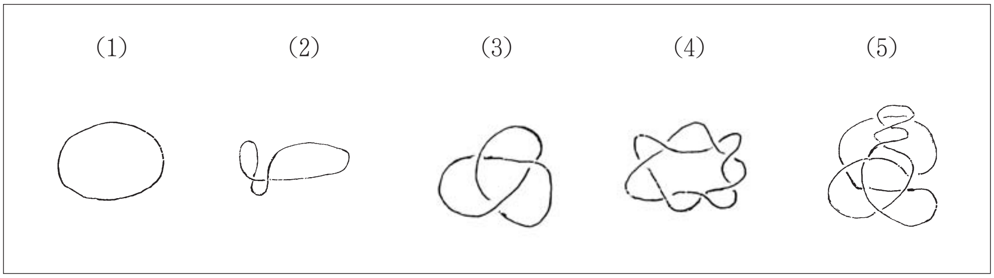
に教育への導入のためのプロジェクトを構成した。

3－2－1　結び目とは

結び目とは、3次元空間でひもの絡んだ状態のことである。科学的には、輪のように絡んでいるひもの状態のことで、いくつかの結び目の集まりの状態を絡（から）み目という。

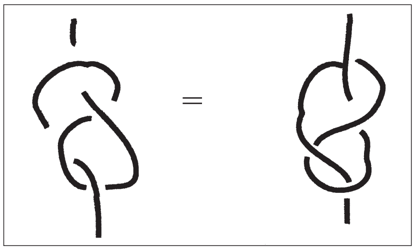
結び目と絡み目





(1)(2)は自明な結び目、(3)三葉結び目、(4)交代結び目、(5)(3)と同じ結び目

2つの結び目があるとき、ひもをあやとりの要領で変形して同じ形にできるならばそれらは同じ結び目、または同型な結び目であるという。結び目と同様に、2つの絡み目も、ひもをあやとりの要領で変形して同じ形にできるならば、それらは同じ絡み目または同型な絡み目であるという。



通常結びといえば、両端のあるひもでできた結び目を考えるのが普通である、そのときには、それらの両端が限りなく伸びていると考え、その延びている部分を動かさずにあやとりの要領で、変形するのである。

結び目の数学の研究は、次の２つに大別される。

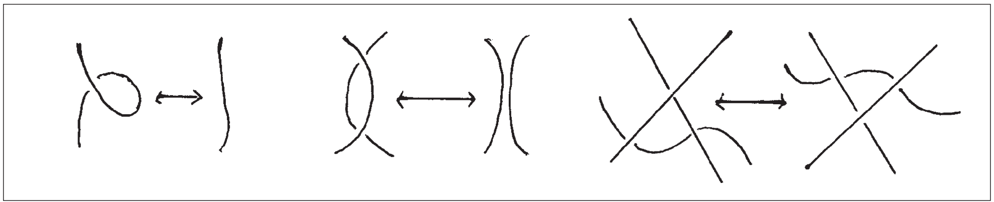
同型問題　：　２つの結び目(または絡み目)があると、それが同型な結び目（または絡み目）であるかどうかを判定する。

分類問題　：　すべての結び目や絡み目を同型なものを除いて分類する。

関連するいくつかの定理をあげておこう。

ライデマイスター移動

交点どうしの関係を変えるような結び目の射影図の変形操作をライデマイスター移動という。



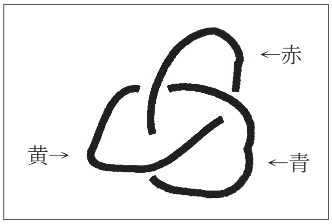
ライデマイスター移動１　　ライデマイスター移動２　　ライデマイスター移動３

１は、結び目にひねりを入れたりはずしたりする操作、２は結び目に2交点を加えたり除いたりする操作、３は結び目の一部を、ある交点の一方からもう一方へ移動する操作で、ライデマイスター移動に関しては、次のことが証明されている。

「２つの結び目が同じであるかそうでないかを判断する一つの方法として、ライデマイスター移動を何度か利用して、同じ結び目になれば、その2つは同じ結び目であるといえる。逆に言えば、同じ結び目であるならば、ライデマイスター移動で変形が可能である。」

３彩色可能性

結び目の図を交差点から交差点までつなぐ辺のすべてを図のように３色で塗る。ただし交差点の近くでは、上を通るものは同じ色で、下でつながる２辺は同じ色を塗ってもいいが､違う色を塗ってもいい。結び目がこの方法で３色に塗り分けることができるとき３彩色可能という。



３彩色可能については次の定理が用意されている。

定理１：２つの同じ結び目の一方が３彩色可能ならば、他方も３彩色可能である。

定理２：２つの結び目の一方が３彩色可能で、他方が３彩色可能でないならば、それらは同じ結び目ではない。

定理３：３彩色可能な結び目は、自明でない結び目である。

以上を基本にして次のような授業の展開を行った。

３－２－２　小学校においては　([5]p.32--50)

１．紙に書かれた結び目の図を見て、実際にひもで作れるのか。

２．実際にひもを見ながら、紙の上にひもの図を書けるか。

３．紙の上に書かれた図を見て、頭の中で動かしてほどくことができるか。

という事前調査をもとに、トレーシングペーパーを使って、ほどいていく過程を、パラパラ漫画のように、作らせ、考えさせた。

実践では、かなり複雑なものを使ったが、やや簡単な結び目の図を使ってほどいていく過程を経験させていけば、空間における動きの理解をより高めることが可能である。

結び目を図の上でほどくことは、ひもの動きを立体的に意識の中で動かしていくことが必要である。これは子どもたちの空間認識能力を高めることにつながる。実際、子どもがひもの動きをどのようにとらえることができるかという調査では、

・小学校４・５年生は結び目の図の理解にそれほどの差はない。１～２回でほどける段階を経て単純な輪になるような結び目の図の場合、クラスの約８割の生徒は、実際のひもで確認しなくても図を見ただけで、ひもを念頭で動かしてほどくことができる。

・子どもがほどけそうにないと判断した自明な結び目についても、トレーシングペーパーを用いて、結び目の図を少しずつ変形していくことによってほどけることが確かめることのできた子どもがかなりいた。

・結び目の変形であるライデマイスター移動はそれぞれの動きだけを単純化して示すと当たり前のこととして理解できる。また、複雑な図においては、ひもの重なりが多く集まっている部分の上を乗り越えて大きく動かすことやそれに伴ってひもの曲がる向きが変わることなど複合した動きに気がつくことは困難であることが分かった。

子どもに、簡単な結び目の図を用いてほどく経験を重ねさせることによって、空間の感覚がよりたかめられることになる。（この授業の実践は平成16年11月ドイツからWittmann教授を招いて研究交流会をもったとき、大阪教育大学付属天王寺小学校での公開授業である。）

３－２－３　中学校においては

中学校においては、次のような点に教育的意義を置くことができる。([5]p.51--97)

１．空間認識の涵養になる。結び目は空間上に存在するものであり、これを教材とすることにより空間認識力がつく。

２．結び目という実在のものをあつかう中で、多くの数学的知識なしで、数学を一から創り上げていくことができる。またはそのような経験ができる。

3. さまざまな分野への応用があり、最先端の理論であり、現在も活発に研究されている。実在との関わりとともに、応用されている。

4. 不変量の例になっている。

5. 図に表すことができ、ヴィジュアル的なものである。グニャグニャした柔らかい図形なので、長さや体積など余分な条件を考えることなく取り扱うことができる。

中高校生に対する目標は、空間概念の養成と、事前の数学的な知識なしに、新しい数学として、手作業などを通して、数学を一から作り出すことができるということが必要である。

結び目は、何本かの線の前後関係によってつくられた3次元空間における単純なモデルである。従って、形より線の位置関係がとても重要であるので、長さや面積と関わることなく、空間の位置関係に絞って取り扱うことができる。素材についてはいろいろ工夫が必要であるが、ひもさえあれば手軽につくることができるので、実際に各自で試行錯誤することができる。さらに、結び目を平面にかいて考察する場合に、定木を使ったり、長さや形状を余り気にする必要がないのでかきやすい。そして、その図を見て、結び目がほどけないことを知るための方法を考えることは、身近な事象を数理的に考察する能力を養う一例になる。中学生には、このような方法の一例として、3色に塗り分ける方法が分かりやすいのではないかと考えている。そしてこの方法は、パズル的であり、それができるかどうかを塗りながら考えさせることによって、生徒の興味・関心を引くものとなる。

実際の授業の展開では、

第一時間目　「結び目をつくろう」

生徒3人にいろいろなつなぎ方で手をつながせてみて、輪になることができるかどうぅかやらせてみる。結び目を表す方法を板書、例示した後、結び目が描かれているカードを配り、ほどいて輪になるかどうかを考えさせる、モールで実際に図の通りに結び目をつくらせてみる。DNAの図に出てくるようなモールでつくった結び目を見せ、ほどけるかどうか考えさせる。

第二時間目　「紙の上で結び目をほどこう」

前回の授業あつかった結び目を実物をつくらずに知る方法がないかを考えさせる。前回の結び目の図をライデマイスター移動を使って考えさせてみる。

第三時間目　「ほどけない結び目を探そう」

インターネットで探したある遺伝子のようすを表した図をみせ（図略)。これはほどけるのだろうか。さてそれをどうして調べたらいいのだろうか。

輪になるものとならないものの区別をする何か特別な方法はないかを考えさせる。交点の数が3つのものですぐに見分けられる例からはじめて法則性を探させた。

第四時間目　「3色で塗り分けられる結び目をつくろう。」

「3彩色することによって、結び目がほどけるかどうかを知ることができる。」ことを生徒たち自身に発見させることを求めたが、私たちの目標「3彩色可能性」による方法を見つけさせるところまではいかなかった。かなりヒントをいって生徒を誘導しても、難しいことが分かった。もう少しポイントを絞る必要性を感じた。他のクラスでの展開では、「線分上を3色を使って、塗り分ける方法を教えた上で、ほどけない結び目の共通の性質を発見させること」に目標を変更したが先のクラスより反応はよく、実際に分かった生徒からその違いを引き出すことができた。さらに的を絞ることによって、生徒に発見したときの「不思議さ」のようなものを感じさせる作業をさせたかった。この不変量

を多くの中学生から引き出すことや理解させることは、われわれも含めて難しいことであるが、それができなくても、作業自体をおもしろいと感じさせることができれば、その作業にひもと結びついた意義を感じさせることができれば、この時期の生徒におもしろい数学であったと感じさせることになる。

最初結び目という教材を投げかけたとき、生徒たちの感覚の中にある「数学」という概念では受け止められず、クイズパズルのように息抜きのお遊びのように受け止められた。「ひもを結ぶという普段何気なく行っている行動には実に深い意味があるのだ」「こんな所にも数学的に考える部分があるのだ」という驚きや興味を持ってくれた生徒もでてきた。この教材は、生徒に「数学とは何か」をもう一度考えさせる教材になったと思う。生徒の、「空間認識能力」の向上や「身近な事象を数理的に考察する力」についての検証は、脳科学的、認知科学的視点からそれぞれ独自の方法で検証されることも必要である。今後の課題は、中学生の段階で不変量としての、「３彩色可能性」を何とか自然な発想として導かせ、困難ではあるが、「３彩色可能性」が結び目の不変量となっていることを考えさせることにあるが、道はまだ遠い。結び目の交点での上下関係を調べるという発想は、中学生にとって考えやすいことのようなので、「絡み目」の「絡み数」などが不変量になっていること、すなわち、ライデマイスター移動によって変わらないということは中学生でも容易に理解できるから、これをカギにして次の展開の組み立てを考えている。

３－２－４　高等学校においては　（[5]pp.98--115）

高等学校における「結び目の数学」の教育的意義として

１．空間認識能力の育成

実在の結び目を扱うのは3次元空間内であり、それを考察する上で射影図を考えると必然的に２次元平面になる。立体から平面へ、また平面から立体への変換を考えることが必要となる教材であり、空間認識能力育成に役立つことが期待できる。また長さや角度を考え、論証が中心となるユークリッド幾何の扱いとは異なり、ひもの前後の重なり具合(前後の位置関係)を中心に考察するので、より純粋の空間認識に焦点が当たるものと考えられる。

２．自分でまとまった数学をつくる体験ができる

学校で学ぶ数学、特に高等学校の授業で学ぶ数学は、既に体系化されていて、問題を解くことによって少しずつ理解していくという受動的なものがほとんどで、自ら考えて数学を創っていくという場面はほとんどない。結び目の数学では、結び目の図に彩色していったり、絡み目に向きをつけて絡み数を考えたり、ちょっとしたアイデアをもとに自分たちで数学を創っていく過程を体験することができる。

３．不変量を扱うことができる。

２つの対象が本質的に同じ物であるか違うものであるか、を考察する不変量の概念を扱うことができる。従来の教育内容の中では、不変量に焦点を当てて学習する機会はほ

とんどなかった。しかし、２つの対象に数や多項式を対応させて、その値や式の違いで２つのものの区別をつけるという考え方は、数学的なものの考え方や見方を養う上で重要である。結び目の数学では、２つの結び目・絡み目が同じであるかどうかを判定することが重要な課題であるので、必然的に不変量の概念を扱うことになる。

４．数学的思考に重点を置くことができる。

従来の学校数学では、計算を中心として展開されてきた。そのため、公式の暗記や運用に優れた生徒が、数学のできる生徒として評価されてきた。ところが結び目の数学では、その取り扱う内容からして複雑な計算は要求されず、考えることすなわち数学的思考そのものに重点を置くことができる。

５．学ぶことの意義が分かりやすい。

現在の学校数学の最終目標は微積分概念の修得である。その目標の達成までに、数学を学ぶ意義や有用性を実感する困難である。それに対して結び目理論は生命科学や天文学、高分子化学などの分野の発展に貢献しながら数学の最先端理論として活発に研究が続けられており、結びやや絡み目の考え方がどのように応用されているかを生徒に分かりやすく解説することができ、数学を学ぶ意義やその有用性がわかりやすいといえる。

などがあげられる。

（大阪・清風高校における実験）

電気部の中学生、高校生を中心とする少人数実験(3回)で、授業実験の前の生徒の認識の調査である。発問は教師の側から行った。

モール、カラーひも、細いリボン、ネクタイ、ビニールひもなどの材料を準備し

「結び目と聞いて何を考えるか。」

「結び目といった聞いたらどんなものを思い出すか？」

「丸結びと蝶々結びの違いは？（つながり方を考えてみよう。)」

釣り糸の結び方（はずれないように)、剣道の面道具ひものつけかた（後ではずれなければならない)、実際に結ばせてみてほどける、ほどけないとその理由を考えさせる。

その後の感想では

（ｉ）はじめはなんのことか全く意味がわからなかったが、やっていくうちに理解でき最終的にはしっかり理解できた。こういう機会を活かして生活の中にある楽しみを見つけていきたい。

（ii）とても難しかったです。でもとても楽しく、もっと深く考えてみ たいと思います。

指導した感想は

「道具はモール、ゴムひも、リボン、針金、カラーひも等を考えてみたが、実際に結んだりほどいたりするのは糸ひもがよかった。ほどけるひも、ほどけないひもの違いは何かを数学的に解析する。数値を導入する。その方法を考えさせるが、生徒からはなかなかでてこない。

この点は実践前にもアプローチをどうするかと大いに悩んだ。しかし結びというものをどのように考えているか。結び目の図を見せればほどける、ほどけないの判断ができるのか、ほどくことに関して数値的に処理することが可能であるかという点に目的を絞った。実際にひもを使って結び目を作ることによって問題の方向付けができると思う。」

そこでは、教師や子どもたちに相互で話をしながら考えさせていく展開であるが、発問や、質問に答えることによって、理解の程度が確認できるわけである。生徒たちの、結びといえば、まる結びや蝶々結びである、よく知っているところで、剣道の防具の結び方、つりの針の結び方などが出てきて、ほどける結び方、ほどけない結び方の考えはでてくるが、なぜほどける、ほどけないという理由について考えさせるには教師側の方向付けが必要である。

少人数の教育実践をふまえて、高校生の一クラスでの授業実践の可能性を探る、結び目の数学で数値を用いた議論を展開できる可能性を探ることを目的に、関西創価高校で授業実践を行った。対象は３年生41名で、３学期の大学へのブリッジとなる内容（コンピュータと数学）の時間である。数学の部分は、「現代数学にふれる」というタイトルで、グラフ理論の初歩と結び目の数学を取り上げた。授業の内容は以下の３項目である。

① ほどける結び目について

実物ではなく、紙に書いた結び目について、結び目がほどけるかほどけないについてはほぼ全員が正確に判断していた。その結び目をほどいていく過程を描くところでは、自分たちで工夫していろいろと描いており興味深いものであった、生徒が考えた移動の仕方を取り上げて紹介し、ライデマイスター移動へと導いていく。結び目がほどける場合には、ライデマイスター移動の繰り返しで自明な結び目にできることの理解はスムースである。

② ３彩色可能性とほどけない結び目について。

結び目がほどけるかほどけないという判断はほぼ全員が正確に答えられた。次に、このほどけるほどけないの違いを考えさせ、生徒１人１人に黒綴じ紐を与え考えさせた。生徒たちから次のような方法がでた。(〈1〉,〈2〉)

〈1〉

ほどける　　　ほどけない

〈2〉

ねじれているのが一つまたは偶数ならほどける、１以外の奇数ならばほどけない。

色を塗るという発想は出てこなかったので、3彩色可能性へと導いていく(生徒に発想の転換を要求することになる)。

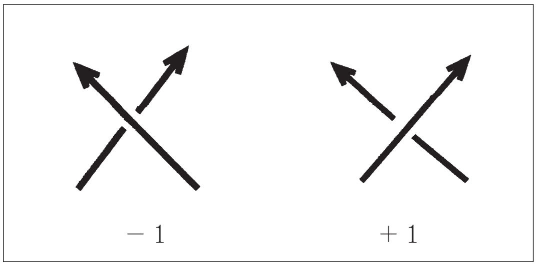
ここでは「3彩色可能　ならば　ほどけない」　は　真

「ほどけない　ならば　3彩色可能」　は　偽

ということを確認させるが、この場面で数学的であると確認できる子どもが多かった。今のところほどけない結び目とほどける結び目をもれなく区別する方法は見つかっていないということを話すとおどろいていた。数学で未解決の問題に余り出会ったことがないことや、このように簡単に思われることがまだ未解決であるということに不思議な感じがしたのである。

③　2成分の絡み目について。

オリンピックのシンボルマークなどを利用して、絡み目の説明をする。2つの異なった2成分の絡み目の違いをどうすれば判断できるかを考えさせた。向きを考えさせ、左巻きの交点に＋1、右巻きの交点に－1を対応させ絡み数を考えるという点は良く理解でき、絡み数はライデマイスター移動によって変化しないことには感心して納得していた。



授業については、約6割の生徒が興味を持てたと解答した。生徒はこの授業の中で興味を感じた点は

- ほどける結び目とほどけない結び目の違いを考えたところに興味があった。
- 3彩色可能であったらほどけないところに、不思議さと興味を感じた。
- 数値を使わないこと、数が余り出てこなかったこと。

等をあげており、数学的と感じたことは、

- 絡み数、絡み数や紙上でライデマイスター移動を行ったとき。
- 線が交差するときのベクトルの向きで＋1とか－1とか表すこと。
- 数字を使って理論的に考えるところ、図を数で表したから。

等をあげている。

今回の授業実践を通して、結び目の数学は、高校生の興味関心を引く内容であることが分かった。生徒達の感想からも分かるように、複雑な計算をすることなしに、考えることに重点を置き、自分たちで法則性を導き出そうとするところに魅力や興味を感じていることが分かる。また結び目は身近なものであるが、これまで数学の対象とは思っていなかった。それが数学の対象となるということに少なからず驚きと興味を持ったようである。

4．まとめにかえて

情報化社会が発展していく中で、基礎となる算数・数学の能力が要求されている。その中で小・中学校（特に高等学校でも）における算数・数学嫌いが増大するという現実がある。そのため最近のパソコンを中心とした算数数学教育に対して、

① 数学の発展から
② 文化としての立場から
③ 子どもの身のまわりから
④ 子どもの認識から
⑤ 子どもの思考から
⑥ フィールドサイエンスとしての授業から

という観点から考察する必要がある。さらに教師は数学的な素養を高め、特に新しい数学を学ぶべきであると考える。

算数・数学の教材をどのように選んでいくのかについて歴史的な要因もあり、大幅に変更することは不可能であるが、本稿では、主として、現行の算数・数学では余り扱わない内容について、教室における実践を紹介した。それらは、少人数への実験であったり、クラス単位の実践であったり、認識の調査で終わっていたりといろいろであるがいずれの場合にも、子どもたちの算数・数学に対する意識を変えることができた。数学の一番中心であった、論証、証明についても、「証明は死んだ[6]」という論文などが発表され、厳密な論理が高等教育以外の場で必要かどうかすら論議されている。

現在いくつかの話題について、小・中・高校生にどのような形で理解させるかについての可能性を検討している。万古不変の数学ではなく、最先端を行く数学について子どもたちに理解させる手段について検討している。今の段階では、一つのトッピクスとして、子どもたちに、「このようなものでも数学として扱えるのだ」、「よく分かった、先生もっと違うことはないのか」、という印象を与えながら、数学をつくっていく過程を味あわせることができるように、まとまった、使える数学を目指している。小学校においては、迷路や、一筆書きなどの問題を通して数学的な論理についてどのように考えていくことが出来るのか。中学生にはネットワークの問題を通して、グラフ理論の入門へ、高校生に対しては、すでにファジー理論の初歩や、フラクタルの話、迷路の問題などを取り上げている。さらに結び目の数学を教室における展開について検討・模索し、本稿では、この結び目の数学を通して、子どもたちがどのように考え、どのように変わっていくかを中心に論じた。

算数・数学教育において、新しい教材をできるだけ子どもたちの経験からでた生きた問題として扱うときには

(1) 非常に複雑な要素が絡んでいる
(2) 問題の本質がとらえにくい
(3) 今まで経験したことがないような問題

(4) 問題の答えがただ1つとは限らない

などの乗り越えなければならない要素がたくさんある。新しい教材を導入するときには、これらをふまえて子どもたちの認識にあわせた教材を模索する必要がある。

算数・数学は、ものの本質をとらえ、論理的に考えることによって、客観的に正しい解決を導く力を養う教科である。問題解決能力の本質的な力を養う教科の一つである。学習指導要領による生きる力をつけていくために、数学の本質的なところを教材に組み込んでいくことによって、計算や、公式や解法のパターンの暗記のみの世界から、これからの情報化社会に生きていくための数学における問題解決の能力をつけるための算数・数学教育を構成していく必要がある。

謝辞

査読者の方からは有益なコメントとご助言をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

参考文献

[1] 国立教育研究所 『小・中学生の算数・数学、理科の成績―第3回国際数学・理科教育調査国内中間報告書』 東洋館出版社 1996

[2] Organization for Economic Co-operation and Development 『New Thinking in School Mathematics』 O.E.C.D.Publications 1961

[3] D.フォーミン他 志賀浩二 田中紀子 『数学のひろばⅠ』 岩波書店 1998

このシリーズは他に 数学のひろばⅡ、数学のひろば別冊 が出版されている。

[4] 根上生也 中本敦浩 『基礎数学力トレーニング Nの数学プロジェクト』 日本評論社 2003

[5] 「結び目の数学教育」 研究プロジェクト 『「結び目の数学教育」への導入―小学生・中学生・高校生を対象にして』 21世紀COE プログラム“結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成”における教育的活動 2005.6

[6] J.ホーガン 山岸義和他訳 『証明は死んだ』 日経サイエンス 1993.12 (原論文は 『The Death of Proof』 Scientific American October 1993)

[7] 上野健爾他編集 数学セミナー別冊 『数学の楽しみ 5』 特集、結び目の不思議 日本評論社 1998.2

[8] 村上 斉 『結び目のはなし(アウトオブコース1)』 遊星社 1990.5

[9] にしざわかずお 『むすび』 科学雑誌「かがくのとも」通巻78号 福音館 1975.9

四天王寺国際仏教大学 図書館
http://www.shitennoji.ac.jp/ibu/toshokan/